



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

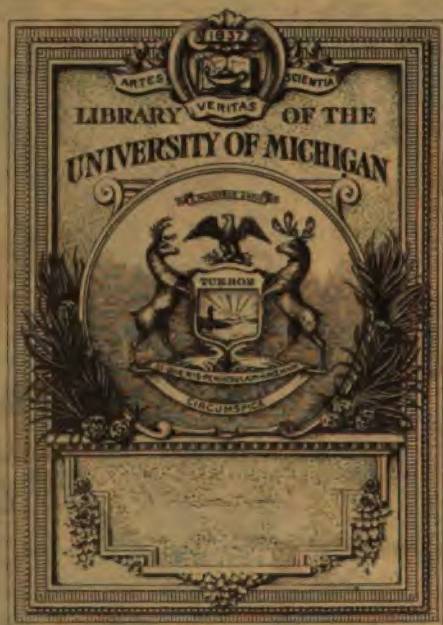
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



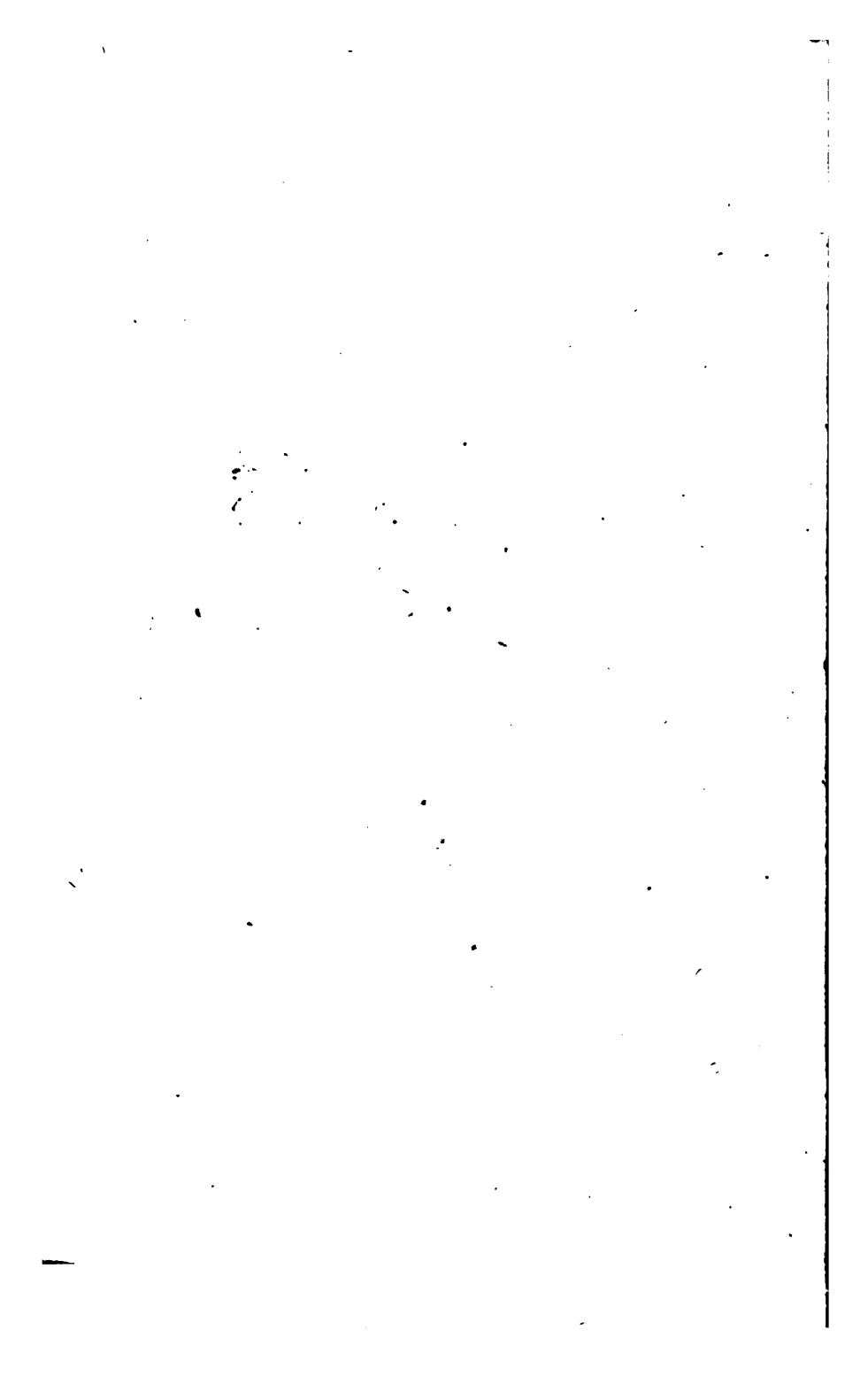


QA
35
M448e

A R. Handrit

ELEMENS

DES SECTIONS CONIQUES.



LES ELEMENS

DES

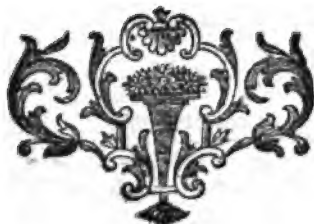
SECTIONS CONIQUES;

DE'MONTRE'ES PAR SYNTHESE ;

Ouvrage dans lequel on a renfermé le petit
Traité des Sections Coniques de
M. DELAHIRE.

PAR M. M***, Professeur de Mathématiques.

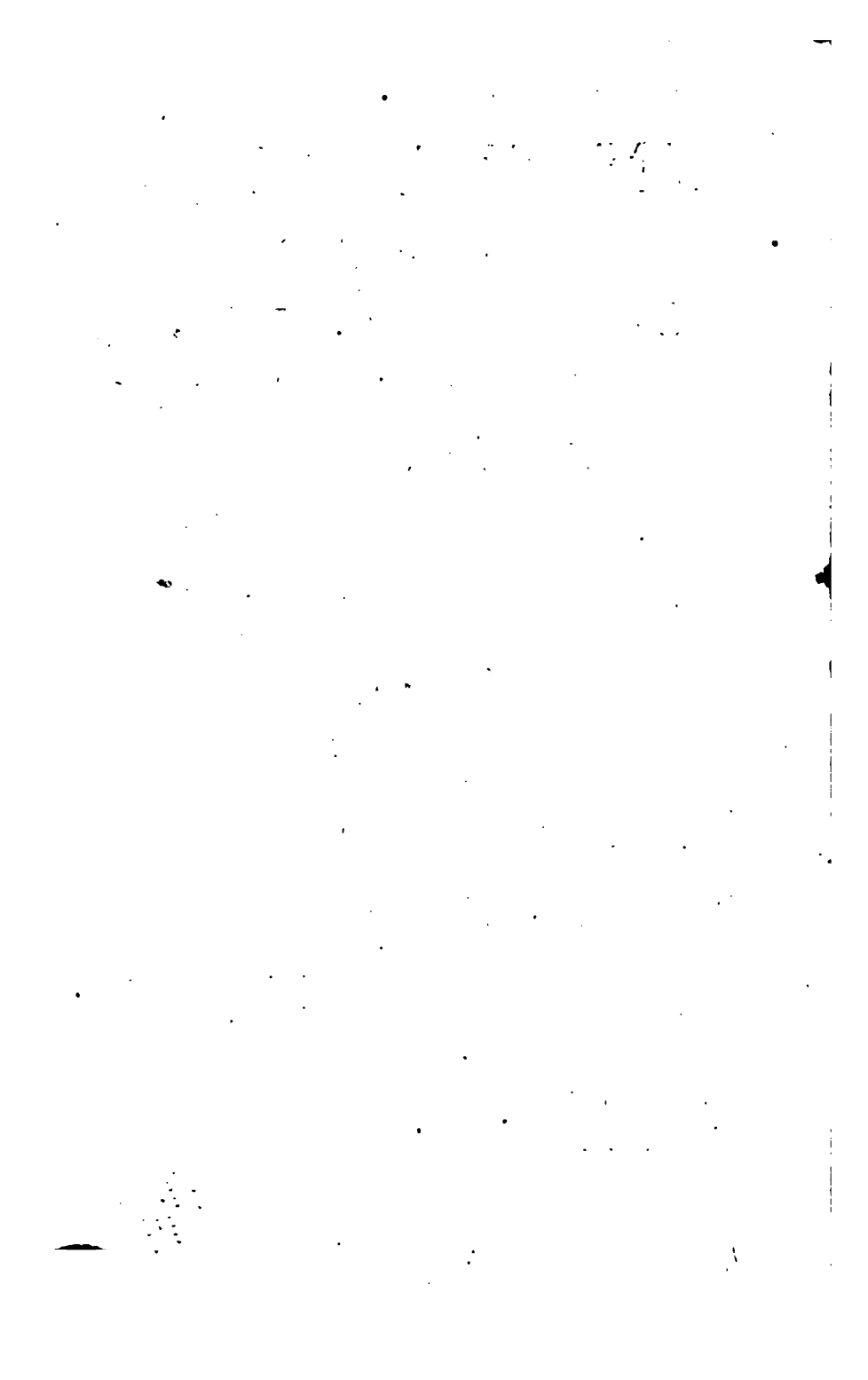
Mauduit, Art. 1. 1. 1.



A PARIS;

Chez DESAINT & SAILLANT Libraires , rue
Saint Jean-de-Beauvais , vis-à-vis le College.

M. DCC. LVII.
Avec Permission & Privilège du Roi.



Heat. of Sci.
Lafitte
2-10-28
16267

PRÉFACE

*En forme de Discours sur la meilleure manière
d'étudier les Mathématiques relativement
aux Places que l'on doit occuper.*

SI l'on ne se propoisoit que de multiplier les connoissances qu'on peut acquérir sur les propriétés de la grandeur considérée en général & dans ses différentes espèces ; la méthode la plus courte & la plus générale seroit assurément celle dont il faudroit faire usage dans l'étude des mathématiques. Mais il s'en faut beaucoup que ce soit là le cas où se trouvent la plus part de ceux qui consacrent aujourd'hui quelque tems à cette science. Destinés presque tous à des occupations où ils ne feront que peu d'usage des vérités purement géométriques ; il est, ce me semble, évident que ces mêmes vérités ne doivent pas être le seul objet de leurs recherches. Outre les avantages sans nombre que nous procurent les Mathématiques par une application directe à tous les Arts curieux & nécessaires ; il en est un plus intéressant pour le plus grand nombre de ceux qui veulent au moins avoir une connoissance suffisante

Quel doit
être l'objet
de l'étude
des Mathé-
matiques.

Cet objet
est l'Art du
Raisonne-
ment, pour
la plus part
de ceux qui
les étu-
dient.

des principaux éléments ; c'est peut-être même le seul qu'ils doivent envisager , je veux dire l'Art du raisonnement qui est essentiel à tous les ouvrages de cette nature. Les Mathématiques ne sont redevables qu'à elles-mêmes du crédit qu'elles ont aujourd'hui. L'ambition de devenir sçavants , le désir de parvenir à connoître les forces de l'esprit humain & de fixer les bornes de son intelligence , tous ces motifs seroient encore de foibles raisons de préférer cette science à toutes les autres. Tout nous invite à connoître la vérité , & à la présenter aux autres dans son plus grand éclat ; mais l'un & l'autre n'est pas également facile. Comment pouvoir dissiper les nuages qui l'environnent ou par l'intérêt & la malice , ou par la complication des questions qui la renferment ? Comment démêler le vrai d'avec le faux , pour le faire connoître seul ; si l'on ignore l'art de raisonner & de convaincre ; & quelle étude plus propre que celle des Mathématiques pour nous l'apprendre ? C'est une logique théorique & pratique en même tems , puisque , nonseulement elle nous donne des regles pour raisonner avec précision , mais qu'elle nous en fait contracter l'heureuse habitude , en nous mettant dans la nécessité de ne donner notre consentement qu'à ce que nous concevons

P R É F A C E. iij

évidemment. C'est ainsi que les Mathématiques sont applicables même dans la vie civile, pourvu qu'on étudie plus-tôt la méthode & la chaîne des raisonnements, que les différentes parties qui peuvent en être l'objet ; & qu'on joigne à cette étude celle des autres hommes qui est toujours indispensable pour former un vrai philosophe. C'est le sentiment des plus grands Géometres, d'après M. *Descartes* qui se dégoutoit quelquefois de ses découvertes, lorsqu'il ne pouvoit les appliquer au bien de la société. M. *S'Gravesande* se plaint de ce que l'on s'occupe plutôt de la solution des problèmes ; que de leur nature ; sans doute parce que cette dernière partie étant plus métaphysique que la première, seroit aussi plus propre à former le jugement. Il n'est pas moins convaincu de la nécessité de joindre la connoissance des hommes à celle dont nous parlons ; & décide clairement que ce n'est pas se rendre propre la méthode des Géometres, que de raisonner continuellement sur la grandeur, sans passer au de-là. * On peut encore

Nécessité
d'appliquer
l'étude des
Mathéma-
tiques au
bien de la
société.

*(*Mathesis*) Quæ inquirendo verò in scientiis reliquis etiam in vitâ civili magni usus est ; si modo aliarum scientiarum , aut ipsorum hominum cognitio cùm Mathesi jungatur. Qui enim , dum Mathesi animum applicat , cætera negligit ; non propriè Methodum Mathematicam addicit. S'G. *Præf. Element. Matheseos universalis.*

voir cette vérité détaillée & démontrée avec toute la justesse possible , dans la Préface du cours de Mathématique de M. *Wolf*.

Plus les avantages qu'on retire des Mathématiques sont considérables ; plus cette science a de rapports avec les autres qui semblent n'être ainsi unies entr'elles , que pour faire voir la liaison intime qu'elles ont avec celle dont nous parlons ; plus il est important de connoître comment il faut se conduire dans cette étude. Pour cela , il faut d'abord discuter à fond la nature des méthodes que l'on emploie ; & ensuite distinguer parmi ceux qui s'y appliquent , différentes Classes , selon les objets qu'ils ont en vue. Pour commencer par cette dernière partie , je fais attention que de tous ceux qui étudient la Géométrie , les uns sont destinés à faire un usage continuel de ce qu'ils ont appris , & les autres ne se proposent que de former leur esprit , pour se rendre plus propres à remplir des fonctions qui quoiqu'étrangères aux Mathématiques , exigent cependant un jugement solide , & une certaine précision géométrique ; ce qui forme deux Classes principales auxquelles on peut ramener toutes les autres. Les premiers ont besoin non-seulement de connoître avec une entière évidence les principes des sciences qu'ils

Différen-
tes Classes
de ceux qui
étudient les
Mathéma-
tiques. Ma-
nière de les
étudier se-
lon la classe
à laquelle
on appar-
tient.

P R É F A C E.

veulent approfondir ; mais il leur faut des méthodes pour diminuer le travail , pour faire des progrès plus rapides ; en un mot pour découvrir ce qu'ils ignorent par les rapports des grandeurs connues avec les inconnues. Il est visible que cette partie n'est pas moins essentielle au Physicien qu'au Géometre , & l'on ne peut aller loin dans l'art de connoître la nature ; si l'on n'est également habile dans les expériences que l'on fait pour l'interroger , & dans l'analyse & la comparaison de leurs résultats , pour découvrir de nouvelles propriétés. Souvent un Physicien Géometre après avoir déterminé les principes fondamentaux de sa Théorie , s'épargne par la justesse de ses raisonnements , une infinité d'expériences inutiles dans lesquelles les autres donnent au hasard , en perdant leur temps sans être plus avancés. La plus part des Ingénieurs , sur tout ceux qui se destinent à la conduite des travaux militaires ou civiles , doivent évidemment avoir des connoissances très-étendues sur la Physique , la Mécanique , & sur tout ce qui a rapport aux Fluides & aux Chocs des corps : ainsi ils sont dans le cas , dont nous venons de parler ; c'est-à-dire qu'ils seront habiles à proportion du plus ou moins de connoissances qu'ils auront dans toutes ces parties , par le secours des Mathé-

matiques, dont elles dépendent. On peut encore mettre dans cette Classe ceux qui par un goût décidé, joint à une grande pénétration, se sont déterminés à suivre entièrement l'étude des Mathématiques : mais il seroit superflu de vouloir instruire ici des personnes guidées par le genie même de la Géométrie, & vrayement nées pour éclairer les autres. Ce même goût, dont l'essence est de rechercher en tout la vérité, ne leur permet pas d'ignorer aucune des voies qui peuvent y conduire. A peine ont-ils fait les premiers pas, qu'ils essayent déjà leurs forces, & commencent à découvrir lorsque les autres sont tout au plus en état de concevoir.

Examen
particulier
de ce qui est
nécessaire,
pour ceux
de la secon-
de Classe,
qui est la
plus étren-
due.

Pour ceux de la seconde Classe, c'est-à-dire, ceux qui sans se destiner à aucune partie des mathématiques leur consacrent cependant quelques moments, pour se former un esprit solide & judicieux ; il est évident qu'ils doivent s'appliquer uniquement à raisonner juste ; qu'ils doivent étudier les méthodes plutôt en Métaphysicien qui discute les principes sur lesquels elles sont appuyées ; & la manière dont elles remplissent leur objet ; qu'en Géometre, qui ne s'en sert que comme d'un instrument pour découvrir la vérité. Il n'est pas moins visible qu'il ne s'agit pas pour eux d'apprendre beaucoup en peu de temps,

P R É F A C E.

vij

mais de rechercher en tout lévidence & la certitude qui sont les deux sources d'où dérive la justesse du raisonnement : en un mot , il faut qu'ils regardent plutôt l'enchainement des vérités , & la force qu'elles en retirent , que ces vérités elles-mêmes dont un grand nombre pourroient leur devenir inutiles ; & sur tout , comme nous l'avons déjà dit , qu'ils tâchent d'appliquer le fruit de leurs connoissances au bien de la société , à laquelle ils appartiennent. C'est pour cette seconde Classe particulièrement , qu'il faut faire choix des méthodes , puisque leurs succès dépendent plus de la manière dont ils seront conduits que de ce qu'ils auront appris.

On peut admettre en général deux parties ^{Deux parties essentielles dans l'étude des Mathématiques.} essentielles dans les Mathématiques , quelle soit la méthode dont on fait usage ; l'une peut être appelée une partie purement intellectuelle , & l'autre une partie purement mécanique. Les Démonstrations des opérations ou des propositions , la recherche des propriétés des Equations ou des figures que l'on examine , la discussion des différents sens dont une question est susceptible , l'élégance des constructions , en n'y employant que le moins de lignes qu'il est possible ; tout cela dépend de la sagacité de celui qui démontre ou qui recherche la vérité. Les opérations,

au contraire & tout ce qui y a rapport, considéré comme tel, peut être regardé comme une partie mécanique, qui ne demande d'autre talent qu'une certaine habitude qui dépend plus de l'exercice que du jugement.

Compara-
raison des
Méthodes
Analytique
& Synthéti-
que.

Tout le monde sçait en général qu'il y a deux méthodes en usage dans les Mathématiques, l'analyse & la synthèse. Mais tous ne connoissent pas également ce qui différencie essentiellement l'une de l'autre. On remarquera d'abord que comme on ne peut démontrer la vérité sans faire quelqu'opération ; (*il ne s'agit pas des axiomes*) il y aura dans la synthèse, comme dans l'analyse, une partie intellectuelle & une partie mécanique ; ainsi la synthèse doit avoir son calcul comme l'analyse. Ce calcul est ordinairement fondé sur les proportions & leurs différentes combinaisons, dans ce qu'on appelle pure synthèse. La différence de ces deux méthodes consiste donc dans la manière, dont chacune procède à découvrir ou à démontrer la vérité. Celle-ci appuyée sur des principes évidents ou des propositions clairement démontrées, marche d'un pas lent mais assuré à la démonstration des vérités qu'elle annonce. Elle ne parle que par théorèmes, & tous ses pas sont éclairés par le flambeau de l'évidende. Celle-ci

P R É F A C E: ix

au contraire suppose d'abord ce qui est en question , & selon que la chaîne de ses conséquences la conduit à quelque vérité ou à quelqu'absurdité , elle en conclut la vérité ou la fausseté de son hypothese. Comme cette chaîne pourroit quelque fois devenir fort longue , il faut de nécessité que la méthode analytique tâche de resserrer le plus qu'il est possible ses expressions , & c'est de là que résulte le calcul algébrique , qu'il faut bien distinguer de l'analyse proprement dite, quoiqu'on lui donne quelque fois ce nom : pour éviter toute discussion , nous l'appellerons *Analyse algébrique*. Quoique l'Analyse tâche d'abréger ses opérations , & que la Synthèse procedé plus lentement , il ne faut pas cependant s'imaginer que l'on n'aura jamais dans la synthèse des constructions plus simples & plus élégantes que celles qui se déduisent de l'Analyse algébrique. Il y a des cas où il faut sçavoir s'arrêter , & dans lesquels à l'aide de quelques réflexions , qui semblent quelque fois étrangères à la question on vient à bout d'une solution qui auroit été d'une longueur insupportable , si l'on eut calculé jusqu'au bout.

Une autre différence remarquable entre la Synthèse & l'analyse , c'est que la première ne peut souvent reconnoître la vérité d'une proposition , sans une longue

*Différence
remarquable des
deux méthodes. Avantages &*

PRÉFACE.

inconvé-
nients de
chacune en
particulier.

chaîne de propositions précédentes ; & que la seconde ordinairement n'emploie que peu de principes , & peut s'appliquer à toutes sortes de questions détachées. C'est par là que l'Analyse est à la fois supérieure & inférieure à la synthèse ; supérieure , par sa généralité & la promptitude de ses opérations ; inférieure , en ce que ne raisonnant que sur des objets détachés les uns des autres , l'esprit est privé du plaisir de contempler cette chaîne non interrompue , qui unit toutes les vérités ensemble , pour faire voir les rapports qu'elles ont entr'elles. Il suit encore de cette différence , que la synthèse est réellement la méthode de doctrine , & l'analyse , la méthode d'invention. Cette différence essentielle se déduit immédiatement de la nature des deux méthodes. La synthèse uniquement occupée de l'évidence & de la certitude des vérités ne s'embarasse pas de la longueur , pourvû qu'elle acquiert l'une & l'autre. L'Analyse au contraire ne cherchant qu'à multiplier nos connoissances , s'efforce toujours d'arriver par la voie la plus courte , aux idées les plus générales , en négligeant quelque fois l'évidence dans les opérations qu'elle fait.

On pourroit induire de-là , qu'il y a des vérités géométriques qui ne sont pas évidentes ; & ce seroit priver la Géométrie

P R É F A C E.

xj

d'une de ses plus belles prérogatives. Pour ^{Deux sortes d'évidence pour les vérités géométriques, ce que c'est quel'évidence proprement dite.} savoir à quoi s'en tenir la dessus & pour éviter en même temps des discussions inutiles, il faut distinguer deux sortes d'évidence. On peut dire en général qu'une proposition est évidente, lorsqu'elle a une liaison nécessaire prochaine ou éloignée, avec les axiomes ou des vérités qui ont la même force. Suivant cette notion, toutes les vérités géométriques sont évidentes, quelque soit la méthode que l'on a employée pour les démontrer : mais il y a encore une espèce d'évidence plus particulière ; c'est celle qui présente les choses à notre esprit d'une manière si claire & si nette, qu'on apperçoit non seulement la vérité, mais encore toutes les raisons qui concourent à l'établir réunies sous un seul point de vue. En un mot, l'évidence proprement dite est celle par laquelle nous connoissons la vérité métaphysique des propositions dont il est question. Cette évidence est particulièrement attachée à la Synthèse, dont les démonstrations sont également lumineuses & convaincantes, qualités nécessaires pour instruire utilement. On retrouveroit la même évidence dans les démonstrations algébriques, si l'on vouloit se donner la peine de développer une foule de raisonnements qui sont compris dans une expression fort courte en apparence ;

& c'est ce que l'on fait lorsque l'on démontre par Synthèse un Théorème déjà démontré par algèbre.

Nécessité
d'étudier la
Géométrie
par synthe-
se, & de réu-
nir les deux
méthodes,
pour deve-
nir Géomé-
tre.

Il suit de tout ce qui précède, qu'en général, il est absolument nécessaire d'étudier la Géométrie par la Synthèse, si l'on veut acquérir quelque précision dans le raisonnement & même faire quelque progrès dans l'Analyse ; car cette dernière méthode suppose un fond de connoissances évidentes sans lesquelles on ne peut combiner & découvrir. Cette étude des éléments par la Synthèse n'exclut pas l'analyse, même pour ceux qui ne se destinent pas entièrement aux Mathématiques. Ce sont deux vérités également incontestables ; l'une que l'on ne peut faire de grands progrès dans l'Analyse sans une ample connoissance des éléments par la Synthèse ; l'autre qu'on ne peut devenir un sçavant Géometre si on ne fait usage des ressources infinies que nous donne l'Analyse par le moyen du calcul. Il semble, cependant à considérer la manière dont quelques personnes enseignent la Géométrie, qu'ils n'ont aucune idée de cette première vérité ; au moins n'y ont ils aucun égard. En effet, à peine a-t-on quelque connoissance des éléments, que l'on se jette aveuglement dans les calculs les plus compliqués de l'Analyse, & l'on croit avoir trouvé la solution d'un

P R É F A C E. xiiij

problème, dès que l'on a résolu l'équation qui en exprime les conditions. On est bien tôt revenu du plaisir que donnent de pareilles solutions, lorsque destitué de tous secours étrangers, il faut essayer ses forces pour arriver à la solution d'une question tant soit peu compliquée. C'est alors qu'on connoit qu'il est plus difficile d'arriver à l'équation, que de la résoudre. Si l'on n'étoit pas déjà convaincu de cette vérité, il suffit pour cela de faire attention, qu'on a donné jusqu'ici des regles générales sur la résolution des équations, sans en avoir donné aucune pour les trouver. Car on n'est pas beaucoup plus avancé pour sçavoir qu'il faut bien examiner l'état de la question, & discuter avec soin ce qu'elle renferme.

Les questions arithmétiques présentent assez communément tout ce qui doit servir à trouver l'équation, lorsque le problème est déterminé. Il n'en est pas de même dans les questions géométriques ou physico-mathématiques. Les données ne paroissent pas quelque fois suffisantes, même dans les problèmes déterminés; il faut imaginer de nouvelles lignes qui créent, pour ainsi dire, de nouvelles conditions dont on puisse tirer autant d'équations que d'inconnues. Pareillement, la solution d'un problème de mécanique dépend le plus

Preuve de
cette vérité
déduite de
la nature
des problé-
mes de Ma-
thémati-
ques.

souvent de la décomposition de certaines forces en d'autres qui leur sont équivalentes , mais tellement choisies & combinées , qu'on puisse trouver par leur moyen les propriétés dont on a besoin. Quelque fois même , comme nous l'avons déjà dit , il faut sortir de son sujet pour arriver à une solution facile , qui sans cela deviendrait impraticable.

Toutes ces adresses de calcul ou de construction ne viennent pas se présenter d'elles-mêmes à l'esprit de ceux qui en ont besoin. Ce n'est pas le hazard ny un heureux tâtonnement qui doit nous les faire découvrir ; & de pareilles découvertes ne peuvent pas flatter une personne qui se rend justice à elle-même. C'est dans cette partie que la raison doit marcher toute seule , jusqu'à ce qu'arrivée à l'équation , elle puisse laisser faire le reste au calcul ; qui la conduit infailliblement au port, lorsqu'elle se sera une fois embarquée. Aussi tous les Géomètres regardent-ils un problème comme résolu , dès qu'ils sont arrivés à l'équation. Il suit de toutes ces réflexions ,

que l'on perd le fruit des méthodes algébriques , lorsqu'on n'est pas en état de trouver l'équation qui en est le premier objet. On pourroit même aller plus loin , & l'on prouveroit aisément que celui qui semble faire un usage assez fréquent de ces

Inutilité
des méthodes
algébriques ,
pour ceux
qui n'ont
pas le raisonnement
formé.

méthodes ne les conçoit pas entièrement. Car pour les concevoir, il faut sentir toutes les conséquences d'une hypothèse, prévoir les variations que pourroient apporter dans ces méthodes les différents changements dont les questions qui y ont rapport sont susceptibles ; or il est évident que tout cela est du ressort du raisonnement, & que les esprits ordinaires n'en pourront venir à bout, si leur jugement n'a été fortifié par la Synthèse. Ce n'est pas que je prétende qu'il n'y ait que la Synthèse capable de fortifier le raisonnement ; l'Analyse proprement dite, & celle qu'avoient incontestablement les anciens, je veux dire cette chaîne de raisonnements ; qu'on est obligé de faire, pour arriver à la solution d'un problème, par le moyen des équations ; cette Analyse n'est certainement pas moins propre que la Synthèse, pour perfectionner le jugement ; mais, comme elle le suppose déjà formé, jusqu'à un certain degré ; c'est-là ce qui établit la nécessité de la Synthèse.

Si l'Analyse ordinaire est presque inutile à ceux qui ne sont pas assez instruits des vérités fondamentales de la Géométrie élémentaire ; peut-on s'imaginer qu'ils tireront quelque avantage de la sublime Analyse des infiniment petits. Ils passent d'ordi-

L'analyse des infiniment petits est encore plus inutile pour ceux qui n'ont pas une certaine force de jugement.

naire assez rapidement sur les suppositions qui ont arrêté les meilleurs esprits, & se croient eux-mêmes Géometres dès qu'ils ont résolu un *Maximum* ou un *Minimum*, dont on leur a donné l'équation. Une pareille science ne peut en imposer qu'aux ignorants, qui ne savent pas que ce n'est rien faire que de manier un calcul sublime, si l'on ignore la Métaphysique des principes sur lesquels il est fondé. On tombera toujours dans cette sçavante ignorance tant que l'on n'étudiera le calcul que pour lui-même, sans songer à la découverte des vérités qui en est le but. Cela vient de ce que l'on ne fait pas attention qu'il est très-possible, en suivant certaines regles, d'arriver à la connoissance des vérités les plus relevées, sans y avoir d'autre part que d'avoir mis en mouvement une machine dont on ignore les ressorts. Encore cette erreur seroit-elle pardonna-ble, si l'on n'y joignoit pas ordinairement la sotte vanité d'attribuer à la force de son génie des découvertes qu'on ne doit réellement qu'à l'excellence de la méthode dont on fait usage.

Conclu-
sion & des-
sein de
l'Auteur
dans cet
Ouvrage.

De toutes les parties des Mathématiques qui tiennent un certain milieu entre les éléments & la haute Géometrie ; je n'en ai point trouvé de plus susceptible de la méthode

méthode Synthétique , que les courbes connues sous le nom général de sections coniques. Je me suis déterminé d'autant plus volontiers à travailler sur cette matière, malgré tout ce qui a déjà été fait là-dessus , que l'on n'a pas encore d'éléments synthétiques à la portée des Commencans ; la plus part se trouvant dans des gros volumes latins très-incommodes & très-rares. Les meilleurs dans ce genre sont sans contredit ceux de *Grégoire de S. Vincent* ; mais on est effrayé, lorsque l'on voit le détail immense dans lequel il est entré. Le Livre que je présente aujourd'hui n'étoit dans son principe qu'une nouvelle édition des éléments de *M. de la Hire* , mais ayant été indispensablement obligé d'éclaircir plusieurs endroits obscurs, & de démontrer généralement des propositions qu'il ne démonstroît que dans des cas particuliers ; je me suis déterminé à suivre en général le plan de l'Auteur, sans m'astreindre à suivre en toutes ses démonstrations , dont quelques unes ne m'ont point paru complètes. En un mot , ce Livre pourra servir d'introduction à tous les autres faits sur cette matière, & même au grand traité des sections coniques du même Auteur , qui a passé pour un des plus difficiles & des plus beaux ou-

vrages que nous ayons en ce genre. Ceux qui ne voudroient que ce qui est absolument essentiel pourront n'étudier dans les trois premiers livres que ce qui regarde les propriétés des axes & des diametres, auxquels ils pourront joindre les propositions que j'ai donné sur la quadrature de ces courbes, & qui m'ont paru indispensables dans des éléments. Dans le reste de chaque livre, j'examine les propriétés les plus générales des sections coniques, par le moyen des sécantes intérieures, & extérieures de chacune de ces courbes; soit pour les décrire par plusieurs points donnés; soit pour fixer le nombre des points dans lesquels elles peuvent se couper, ce qui est très-important dans la construction des équations du troisieme & quatrieme degré; soit enfin pour déterminer par leur moyen les tangentes, les sou-tangentes, les normales, les sou-normales, dont la connoissance peut être très-utile dans un grand nombre de cas applicables à la pratique; comme j'espere le faire voir par la suite. On peut voir à la tête du quatrieme & cinquieme livre les Avertissements qui annoncent ce que je me suis proposé dans ces additions. Au reste, je ne suppose pour la connoissance de cet ouvrage que les plus simples éléments de

P R E F A C E. **xxi**

Géométrie , & je tâche de conduire les Commençants jusqu'aux plus curieuses propriétés de ces courbes qui sont la base de toutes les parties des Mathématiques. Pour ce qui est des Auteurs dont j'ai pris quelque chose , je les cite , lorsque ma démonstration ne differe point de la leur ; mais je n'ai pas cru devoir m'affujettir à cela , lorsqu'elles sont entierement différentes. Je ne parle point des Sections coniques des degrés supérieurs ; quoiqu'elles ayent des propriétés analogues à celles de chaque section du premier genre de même nom. Une Théorie de ces courbes , quoique très-interessante , seroit devenue fort difficile par la méthode synthétique , & demanderoit à elle seule , un volume entier.

FIN.

APPROBATION.

DU CENSEUR ROYAL.

J'AY lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, *L'Elémens des Sections coniques démontrées par synthese*. Cet Ouvrage dont le fonds appartient à M. De la Hire, a été estimé de tous les sçavans ; le public en désireroit une nouvelle édition , mais il étoit apropos de l'augmenter. L'Auteur qui a entrepris ce travail , l'a fait avec soin , & a conservé dans ses démonstrations cette exactitude si recherchée par les anciens Géometres ; il y a ajouté un grand nombre de propositions qui n'étoient point dans l'Ouvrage de M. De la Hire , il l'a aussi enrichie de quelques Théorèmes dont les remarques & les applications sont nouvelles : elles sont démontrées avec clarté , & mises à la portée de ceux qui sçavent les élémens de Géométrie. il est à souhaiter que cet ouvrage fasse renaitre le goût de la synthese , un peu trop abandonnée ; après la lecture de celui-ci , on sera plus en état de comparer avec fruit la méthode analytique que les Geometres ont adoptée depuis quelque tems à celle des anciens.

Fait à Paris ce 3 Avril 1757.

MONTCHARVILLE.


Lecteur & Professeur royal.



LEMME

FONDAMENTAL,

Pour l'intelligence de ce Traité.

*  *I une ligne droite AB est coupée en deux parties égales en C, & en deux autres parties inégales en D : je dis que le rectangle des deux parties inégales, est égal au quarré de la moitié de la ligne, moins le quarré de la moyenne, ou (ce qui revient au même) $AD \times DB = CB^2 - CD^2$. (Fig. 1.)*

DÉMONSTRATION.

$AD = AC + CD = BC + CD$ puisque $BC = AC$,
& de même $BD = BC - CD$.

Donc $AD \times BD = (BC + CD) \times (BC - CD)$.
Et faisant la multiplication indiquée, on aura
 $BC^2 + BC \times CD - BC \times CD - CD^2$, ce qui se réduit à $BC^2 - CD^2$; en effaçant ce qui se détruit.
Ce qu'il falloit démontrer.

Ce Lemme est d'un grand usage pour dé-

montrer les propriétés des sécantes intérieures & extérieures dans les courbes que nous allons traiter. C'est pourquoi l'on ne sçauroit l'avoir trop présent à l'esprit.*

DE LA PARABOLE.

Génération de cette Courbe.

S'IL y a sur un plan une ligne droite AD , & un point F hors de cette droite ; je dis que l'on pourra trouver une infinité de points, comme P, P, P tels que la ligne FP , menée du point F à chacun de ces points P , soit égale à PA menée du même point P perpendiculairement à AD . (Planche 1. figure 2.)

DÉMONSTRATION.

Par un point quelconque A de la ligne AD , j'éleve la perpendiculaire indéfinie APR . Je joins les points A, F par la ligne AF . Enfin je fais l'angle AFP égal à l'angle FAP . Il est évident, par cette construction, que le point P est un de ceux que l'on demande, puisque le triangle APF est isocèle, & que AP est perpendiculaire à AD . Il est de plus évident que l'on pourra trouver une infinité de points comme P , puisque l'on pourra prendre une infinité de points comme A , sur la

Livre Premier.

3

ligne AD , pour les déterminer de la même manière. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

2. Si par le point F , on mene la ligne FD perpendiculaire à la ligne AD , il est évident que la ligne qui passe par les différens points P coupera aussi la ligne FD , & de plus qu'elle la divisera en deux également en T . Il suit encore de la même génération, que cette ligne PPT s'augmente à l'infini, & qu'elle s'éloigne aussi à l'infini de la ligne FD prolongée vers S .

D E F I N I T I O N S

I.

3. La ligne PPT , formée par les points P , P est appelée *Parabole*. On verra dans la suite pour quelle raison les anciens Géometres l'ont ainsi nommée.

I I.

4. Le point F pris sur le même plan que la droite AD , & placé hors de cette droite: est appelé le *foyer* de la Parabole.

I I I.

5. La ligne AD *Directrice* de la parabole.

I V.

6. La ligne DFO perpendiculaire à la di-
Aij

4 *De la Parabole*
rectrice AD , & qui passe par le foyer F , est
nommée l'*Axe* de la parabole.

V.

7. Le point T qui divise en deux également, la partie de l'axe comprise entre le foyer & la directrice AD le *sommet* de la parabole.

VI.

8. Une perpendiculaire PO menée d'un des points P de la courbe sur l'axe & terminée au même axe, *ordonnée*, ou *appliquée* à l'axe.

VII.

9. La partie TO de l'axe, comprise entre le sommet T de la courbe & la rencontre O de l'ordonnée, est appelée *abscisse*, ou *coupée*.

VIII.

10. Toute ligne menée dans la parabole parallèlement à l'axe, est appelée *diamètre*.

IX.

11. Une ligne droite qui ne rencontre la parabole qu'en un seul point, & qui ne passe pas au dedans, est appelée *tangente* en ce point.

Livre Premier:

X.

12 Une ligne double de FD comprise entre le foyer F & la directrice, s'appelle *parametre* de l'axe.

COROLLAIRE.

13. On voit que le foyer est éloigné du sommet de la parabole, du quart du parametre de l'axe.

P R O P O S I T I O N I.

T H É O R È M E.

14. Supposant la parabole formée comme on vient de l'expliquer ; si de quelqu'un de ses points P on abaisse l'ordonnée perpendiculaire à l'axe PO : je dis que l'on aura $PO^2 = 2OT \times DF$.

D É M O N S T R A T I O N.

A cause du parallélogramme rectangle $ADOP$, ou à $OD=AP=FP$ par la génération & à cause du triangle rectangle FOP , on a $FP^2=FO^2+PO^2$.

Mais DO étant coupée en deux parties inégales en F , son quarré sera égal au quarré de $DF + FO = DF^2 + 2DF \times FO + FO^2 = (DF+2FO) \times DF + FO^2$: & à cause que DF est coupée en deux également en T , en met-

tant à la place DF , $2FT$ qui lui est égal, il vient pour une nouvelle expression du carré de DO , $(2FT+2FO) \times DF + FO^2 = 2OT \times DF + FO^2$. On a donc $FO^2 + PO^2 = 2OT \times DF + FO^2$ & ôtant de ces carrés égaux le carré FO^2 qui leur est commun il vient $PO^2 = 2OT \times DF$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

15. Il est évident par ce, qu'on vient de démontrer que le carré de chaque ordonné PO , est égal au produit de son abscisse TO par le double d'une même ligne FD . Car puisque l'on a $PO^2 = 2OT \times DF$, on a aussi $PO^2 = OT \times 2DF$.

COROLLAIRE II.

16. Il est encore évident que les carrés des ordonnées sont entr'eux comme les abscisses correspondantes à ces ordonnées. D'un point quelconque p soit menée une ordonnée po on aura $po^2 = 2DF \times oT$: mais on a aussi $PO^2 = 2DF \times OT$ donc $PO^2 : po^2 :: OT \times 2DF : oT \times 2DF :: OT : oT$, en divisant la seconde raison par $2DF$.

COROLLAIRE III.

17. Si l'on réduit en proportion l'égalité $PO^2 = 2DF \times OT$. On aura cette proportion continue $OT : PO :: PO : 2DF$. Ce qui montre

Livre Premier.

7

que le parametre est troisieme proportionnelle à l'ordonnée & à son abscisse. Ainsi connoissant une abscisse quelconque & l'ordonnée correspondante, on pourra toujours trouver le parametre.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

18. *La ligne droite TS menée par le sommet T de la parabole parallèlement à l'ordonnée PO, touche la parabole au même point T. (Fig. 2.)*

DÉMONSTRATION.

Supposons qu'elle puisse rencontrer la parabole en quelqu'autre point S. Par ce même point S, je mène Sa perpendiculaire à la directrice, & SF au foyer. Puisque ce point S est un des points de la parabole, on aura $SF = Sa$; mais à cause du parallélogramme rectangle aDTS, $Sa = DT = FT$ donc on auroit, $SF = FT$. Ce qui est absurde, puisque l'hypotenuse d'un triangle rectangle, est nécessairement plus grande qu'un des côtés : & comme on démontrera la même chose pour tout autre point que le point S, il suit que la ligne TS touche la parabole en T. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

19. *Supposant les mêmes conditions ; je dis*

A iv

qu'un diametre PI ne rencontre la parabole qu'en un seul point P , & qu'il passe au dedans de la parabole. (Fig. 3.)

DÉMONSTRATION.

Si le diametre PI rencontroit encor la parabole en quelqu'autre point I , par la génération, les lignes IF & IA seroient égales, mais PF & PA le sont aussi par la même raison, & en leur ajoutant la même PI on aura $PF+PI=IA$. On auroit donc aussi $PF+PI=IF$, ce qui est absurde; car deux côtés d'un triangle pris ensemble, sont toujours plus grands que le troisième.

De plus la parabole s'éloignant continuellement de son axe TF , par le corollaire de la génération, elle s'éloignera aussi du diametre PI parallele au même axe, c'est pourquoi PI est tout entier au dedans de la parabole. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

20. Tout étant comme dans la proposition précédente; si l'on tire AF , & que par le milieu E de cette ligne & le point P , on mene la droite PEG ; je dis que cette ligne sera tangente au point P . (Fig. 3.)

DÉMONSTRATION.

Puisque le point P est un des points de la

parabole, on a $PF=PA$. Mais le point E est le milieu de AF ; donc la ligne PE est perpendiculaire sur AF , & passe par tous les points également éloignés d' A & d' F . Cela posé, il est évident que tout point comme p différent de P , ne peut appartenir à la parabole. Par le point p soient menées les droites pA pF , qui seront égales; par le même point soit abaissée la perpendiculaire pa à la directrice AD . Si ce point étoit à la parabole, on auroit par la génération $Fp=ap$: donc aussi ap seroit égal à Ap , puisque $Fp=Ap$, ce qui est absurde: puisque l'hypothénuse Ap d'un triangle rectangle est nécessairement plus grande qu'un des côtés de l'angle droit. On démontrera la même chose, de tout autre point pris au delà de P par rapport à E : donc la droite PE ne rencontre la parabole qu'au seul point P .

Je dis de plus qu'elle ne peut couper la parabole, ou ce qui est la même chose, que tout point comme S au delà de cette ligne par rapport à l'axe, ne peut être à cette courbe. Par le point S , aux extrémités AF de FA , soient menées SF & SA , par le point r où la droite SF rencontre la ligne PE soit menée rA , on aura $Fr=rA$. Donc $Fr+rS$, ou $FS=Ar+rS$, mais $Ar+rS>AS$; donc aussi $FS>AS$. Enfin si l'on abaisse SV perpendiculaire à la directrice, l'hypothénuse AS , sera évidemment plus grande que le côté SV . Donc à plus forte raison, on aura $FS>SV$:

donc le point S n'est point à la parabole, puis l'on n'a pas $FS=SV$. Donc la droite PEG est tangente puisqu'elle rencontre la parabole au seul point P & ne peut la couper. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

21 Il suit de cette proposition que l'angle FGE fait par la tangente GE avec l'axe, est égal à l'angle FAD . Car les triangles rectangles FAD , FEG ont un angle commun en F . Il est encore visible que le même angle FAD est égal à l'angle APE , à cause des parallèles AP FG .

Enfin le triangle PFG est isocèle ; car la ligne GP étant perpendiculaire sur le milieu de AF , divise l'angle APF en deux également. Donc l'angle $FPE = EPA = FGE$ à cause des parallèles AP GF : donc $FP = FG$.

COROLLAIRE II.

* 22. Puisque le triangle GFP est isocèle, il est évident que l'angle extérieur PFK est double de l'angle PGF .

PROBLÈME I.

23. Une parabole TPR , son axe GK & son foyer F étant donnés, trouver une tangente qui fasse avec l'axe un angle égal à un angle don-

né fgp ; pourvu qu'il ne soit pas plus grand qu'un droit. (fig. 3.)

SOLUTION.

Au foyer F , faites l'angle KFP double de l'angle donné, le côté FP de cet angle, ira couper la parabole en quelque point P . Ensuite du même point F comme centre & pour rayon FP décrivez un arc qui coupe l'axe en G . Je dis que la ligne GP menée par le point G & par le point P est tangente en P & qu'elle fait avec l'axe un angle égal à l'angle proposé.

DÉMONSTRATION.

Du point P où la ligne FP reconte la parabole, soit abaissée PA perpendiculaire à la directrice : & soit menée la ligne FA à cause des parallèles AP , FG l'angle $APG =$ l'angle FGP . Mais par construction l'angle $FGP =$ l'angle FPG puisque le triangle est isocèle. Donc $FGP = APG$, c'est-à-dire que la ligne AF est divisée en deux également en E par PG , & par conséquent cette même ligne est tangente en P , par la dernière proposition. Enfin l'angle PFK ayant été fait double de l'angle donné, & étant extérieur au triangle isocèle PGF , il est évident que l'angle GFP est égal à l'angle proposé. Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

24. Par un point P donné sur la parabole, l'on ne peut mener qu'une tangente PG . (fig. 4.)

DÉMONSTRATION.

Supposons d'abord que par le point P dans l'angle PGF , on puisse mener une ligne Pg , aussi tangente à la parabole. Par le point F je mène Fa perpendiculaire à Pg . Il est évident que le point a doit tomber entre A & D sur la directrice ; car l'angle PgF étant extérieur au triangle PGg , est plus grand que l'angle G : donc en comparant les triangles rectangles, Fdg & FEG l'angle GFE sera plus grand que l'angle gFd : du point a soit élevée la ligne ap perpendiculaire à la directrice & qui rencontrera la parabole en quelque point p duquel on menera pF au foyer, qui sera égal à pa par la génération ; enfin par ce même point p & par le point e milieu de aF , on menera la droite peM qui sera aussi perpendiculaire à Fa & tangente au point p ; par la proposition précédente. D'où il suit que la droite Pg ne peut être tangente, puisqu'elle sera toujours séparée de sa parallèle peM de la distance de si petite qu'elle soit. Donc elle passe au dedans de la parabole, & la droite PG est la seule tangente que l'on puisse mener par le point P ; car on prouvera de la même manie-

re qu'ayant mené cette tangente PG au point P , on ne peut en mener une autre au même point P , qui passe au dessus de PG . Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

25. On voit par ce qui a été démontré ci-dessus, que toutes les tangentes rencontrent l'axe, & tous les diametres ; & qu'elles se rencontrent toutes, puisque, par la quatrième proposition, elles ne sont que parallèles.

PROPOSITION VI.

PROBLÈME II.

26. Trouver une tangente qui fasse avec l'axe du côté de la parabole un angle moindre que quelqu'angle donné que ce soit, pourvu qu'il ne soit pas plus grand qu'un droit. (fig. 5.)

SOLUTION.

Soit tirée Fa , en sorte que l'angle FaD soit égal à l'angle donné ; ou ce qui est la même chose, soit fait l'angle DFa égal au complément de l'angle donné : soit ensuite pris le point A au-delà du point a à l'égard de l'axe : il est évident que l'angle FAD sera plus petit que l'angle donné FaD ; & par le corollaire 1^{er} de la quatrième proposition ; la ligne PEG

menée par le milieu E de la droite FA sera tangente en P , & fera avec l'axe l'angle PGF égal à l'angle FAD moindre que l'angle FaD donné. Ce qu'il falloit trouver & démontrer.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

27. Supposant toujours les mêmes choses que ci-devant ; je dis que la partie TG de l'axe comprise entre le sommet T de la parabole, & la rencontre de la tangente en G est égale à l'abscisse TO .

DÉMONSTRATION.

Par le corollaire 1^{er} de la quatrième proposition, le triangle PFG est isocèle ; donc $FG=FP=AP=OD$, à cause du parallélogramme $ADOP$: & si de ces égales FG . OD , on ôte les égales FT DT , on aura les restes égaux OT TG ; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE:

28. Si par le point T , on mene la tangente TS , jusqu'au diamètre PI , & la ligne TI parallèle à la tangente en P ; il suit de la présente proposition que l'on aura $PS=PI$: car à cause du parallélogramme rectangle $POTS$ on a $PS=TO$ & à cause du parallélogramme $PGTI$ on a $PI=TG$, mais $TO=TG$: donc $PS=PI$.

DÉFINITION.

* 29. La ligne OG comprise entre l'ordonnée PO , & la rencontre G de l'axe par la tangente PG menée par le point P , s'appelle *sou-tangente*. D'où il suit que la sou-tangente est double de l'abscisse, par la précédente proposition.

PROBLÈME III.

30. Un point P étant donné sur la parabole : mener une tangente en ce point.

SOLUTION.

Du point donné P je mène l'ordonnée à l'axe PO . Je prens sur le même axe indéfiniment prolongé, la partie TG égal à OT . Enfin par le point G , & le point donné P je mène la droite PG qui sera la tangente demandée ; comme il est évident par la proposition précédente.

PROBLÈME IV.

31. D'un point G pris sur le prolongement de l'axe, mener une tangente à la parabole.

SOLUTION.

Je prens sur l'axe au dedans de la parabole, la partie $OT=TG$. Au point O j'élève

la perpendiculaire OP , qui rencontre la parabole en P . Enfin par ce point & le point donné G , jè mene PG qui sera la tangente que l'on demande.

On voit par ces deux problèmes, que les propriétés des sou-tangentes donnent un moyen facile pour mener les tangentes à la parabole ; & c'est par cette raison que tous les Géomètres ont cherché des expressions générales de ces lignes dans toutes sortes de courbes, afin de pouvoir leur mener des tangentes, lorsqu'il est nécessaire.

P R O B L È M E V.

32. Une parabole MAN , son axe AF , le foyer F & la directrice DR étant donnés avec un point P sur le même plan ; mener une tangente qui passe par le même point P . (Fig. 7 & 8.)

SOLUTION.

Du point P comme centre & rayon PF , soit écrite une portion de cercle qui coupera la directrice en deux points RS ; soient tirées les lignes RF & SF au foyer ; lesquelles seront divisées en deux parties égales en G & g . Enfin par ces points & par le point donné P , on menera les droites $OPGL$, $Pogl$ qui seront chacune tangentes, l'une en O & l'autre en o ; & passeront toutes deux par le point P . Enfin pour déterminer le point de contingence O , o par les points SR on élèvera les perpendiculaires

laire à la directrice SO , Ro jusqu'à ce qu'elles rencontrent la parabole aux points O , o qui seront les points de contingence demandés.

DÉMONSTRATION.

A cause du cercle FRS , on a $PF = PS$. Donc le point P est également éloigné d' F & d' S . D'ailleurs on a divisé FS en deux également en G ; donc PG est perpendiculaire sur le milieu de FS , donc elle passera par tous les points également éloignés d' F & d' S . Donc elle passera par le point O , ou la ligne SO parallèle à l'axe, rencontre la parabole & touchera la courbe en ce seul point. Car on démontrera, comme dans la quatrième proposition, que tout point différent du point O , ne peut appartenir à cette courbe.

On voit évidemment par la figure 8. que ce seroit la même solution, si le point P étoit au-delà de la directrice, par rapport à la parabole.

R E M A R Q U E.

33. Le problème aura toujours deux solutions; tant que le point donné ne sera pas sur la courbe. Car alors la directrice seroit tangente au cercle décrit du rayon PF , & si le cercle ne coupoit pas la directrice, ou ne la rencontroit en aucun point, le problème seroit impossible, & l'on seroit sur que le point P seroit au dedans de la parabole.

Ce problème renferme les deux précédents & l'on peut se servir de cette construction pour les résoudre.*

ce point comme centre & ayant pour rayon MA ;
 touche la double ordonnée en A , & la parabole en
 deux points P . Q . (Fig. 10).

SOLUTION.

On prendra sur l'axe la partie $AO = AB$;
 au point O , on élèvera l'ordonnée OP . Enfin
 ayant pris OM égal à la moitié du parametre
 TH du côté de l'ordonnée AB , & joint les
 points P , M , par la ligne MP : le point M
 fera le centre du cercle demandé.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'on a fait OM égal à la moitié du
 parametre TH , il est évident, par la proposition
 précédente, que la ligne PS perpendiculaire à
 PM , est tangente à la parabole P . Elle est aussi
 tangente au cercle au même point P ; puis-
 qu'elle est perpendiculaire à l'extrémité du rayon
 MP . Donc le cercle touche la parabole au
 point P . Ce qui se démontrera de même par
 rapport au point Q : reste à faire voir que CB
 touche aussi le cercle en A , ou, ce qui revient
 au même, que $AM = PM$.

Par construction $AO = AB$. Donc $TO =$
 $AT - AB$. Donc $PO^2 = TO \times TH = AT \times TH$
 $- AB \times TH$. OM étant égal à la moitié du
 parametre TH . Son quarré $OM^2 = \frac{1}{4} TH^2$, &
 à cause du triangle rectangle POM , on a
 $PM^2 = PO^2 + OM^2$. Donc $PM^2 = AT \times TH$
 $= AB \times TH + \frac{1}{4} TH^2$.

De même $AM = AO - OM = AB - \frac{1}{2}TH$.
 Donc $AM^2 = (AB - \frac{1}{2}TH) \times (AB - \frac{1}{2}TH) =$
 $AB^2 - AB \times TH + \frac{1}{4}TH^2$. Donc $PM^2 = AM^2$;
 car par la propriété de la parabole, $AB^2 = AT \times TH$.
 Donc $PM = AM$. Ce qu'il falloit trouver &
 démontrer. *

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

44. Dans la parabole TEP, dont l'axe est TO, une tangente PH, terminée à l'axe en H, & une autre tangente à l'origine de l'axe en T, rencontrant le diamètre DP en B: Je dis que le triangle TAH, fait par les deux tangentes & par l'axe est égal & semblable au triangle BAP fait par les mêmes tangentes & le diamètre PB. (Fig. 11).

DÉMONSTRATION.

Par le point P, origine du diamètre PD: je mene l'ordonnée à l'axe PO, par la septième proposition $TO = TH$; mais à cause des parallèles TB PO, $TO = BP$. Donc $TH = BP$, d'où il suit évidemment, que les triangles rectangles PAB TAH sont égaux & semblables, puisqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun & un côté égal. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

45. Ayant mené TD parallèle à PH, si à chacun des triangles égaux PAB TAH, on ajoute le quadrilatère TDPA, on aura le triangle TDB égal au parallélogramme TDPH;

ou bien au rectangle $TOPB$, à cause des parallèles BP , MH & des bases égales TO , TH .

Il est aussi évident que le même triangle TDB est égal au triangle POH , en ôtant du rectangle $TOPB$ le triangle PAB , & ajoutant au reste $APOT$ le triangle TAH qui lui est égal.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

49 Supposant les mêmes choses, si de quelque point E de la parabole, on mene les droites EG , EM parallèles aux tangentes TB , PH ; je dis que le triangle EGM est égal au rectangle $GTBF$. (Fig. II).

DÉMONSTRATION.

Les triangles POH , EGM étant semblables à cause des parallèles, PH , IM ; PO , GF , on a $POH:EGM::PO':EG'$ & par cor. 3 de la 1^{re} proposition $PO':EG'::TO:TG$ & à cause des parallèles BP , GH , $TO:TG::TOPB:TGBF$.
 Donc $POH:EGM::TOPB:TGBF$.

Mais par la précédente proposition

$$POH = TOPB \text{ donc aussi } EGM = TGBF.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

47. Mais si le point E étoit au-delà du diamètre, par rapport à l'axe comme en e , ayant mené l'ordonnée eg qui rencontre l'axe en g . Les triangles egM & POH , ayant leur côtés parallèles seront semblables, & donneront $POH:egM::PO':eg'$ & par corollaire 3. de la 1^{re} proposition $PO':eg'::TO:Tg$ & à cause des parallèles BP , GH $TO:Tg::TOPB:Tgfb$.

Donc $POH : egM :: TOPB : TgfB$.

Mais par la précédente proposition

$POH = TOPB$ donc aussi $egM = TgfB$.

La proposition est donc encore vraie dans ce cas (Fig. 11.)

48. Enfin si le point E est au-delà de l'axe, par rapport au diamètre PI (Fig. 12); la proposition subsiste toujours. Car les triangles POH , EGM seront toujours semblables, & la démonstration ne diffère en rien de celle du premier cas : d'où il suit que cette proposition est générale, & démontrée pour tous les cas possibles.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

49. Les mêmes choses étant posées : je dis que le triangle EFI est égal au parallélogramme $PIMH$.

DÉMONSTRATION.

Si le point E , est entre P & T (Fig. 11); par le corollaire de la 10^{ème} proposition $POH = POTB$; mais par la précédente $EGM = GTBF$.

Donc $POH - EGM = POTB - GTBF$ & ôtant encore de chaque membre de l'égalité le quadrilatère $PQGO$: on aura $POH - EGM - PQGO = POTB - GTBF - PQGO$ ou $MEQH = PQF$, donc en ajoutant à chaque membre de l'égalité, le quadrilatère $PIEQ$: $MEQH + PIEQ = PQF + PIEQ$, ou réduisant $PIMH = EFI$.

50. Si le point E est au-delà de l'axe, par

rapport au diamètre PI (Fig. 12.); par la 10^{ème} proposition, le triangle $PAB = TAH$. Donc $PAB + PIMTA = TAH + PIMTA$: & réduisant on a le quadrilatere $TBIM = PIMH$. Enfin ôtant de ce quadrilatere le rectangle $GTBF$, & lui ajoutant le triangle EGM égal à ce rectangle, on a encore le triangle $EFI = PIMH$.

Enfin si le point E se trouve de l'autre côté du diamètre, par rapport à l'axe comme en e (Fig. 12.), par la 10^{ème} proposition $TAH = PAB$. Donc $TAH + TgfPA = PAB + TgfPA$; ou en réduisant $HgfP = TgfB = egM$, par la précédente. Donc $HgfP - MgfI = egM - MgfI$, ou ce qui revient au même après la réduction, le parallélogramme $PIMH$ égal au triangle efI . Ce qu'il falloit démontrer dans tous les cas.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

§1. Les choses étant toujours dans le même état, si d'un point E de la parabole, on mene une droite Ee parallèle à la tangente PH , je dis qu'elle rencontre la parabole en un autre point e , & qu'elle est coupée en deux également en I , par le diamètre PI , mené par le point de contingence P (Fig. 11.).

DÉMONSTRATION.

Si la tangente étoit BT , la proposition seroit évidente par la génération; mais si c'est toute autre tangente comme PH : par la sixième proposition, l'on peut trouver une tangente RS qui fasse avec l'axe un angle RSO moins

dire que, l'angle PHG . Il est évident que le point R ou cette ligne touche la parabole, est plus éloigné du sommet T que le point P , & partant elle coupera la première tangente en a au delà de P , par rapport à H . Mais elle ne peut la couper, qu'elle ne coupe aussi sa parallèle Ee en quelque point ; donc cette droite Ee qui a déjà un point E sur la parabole, la va couper encore en quelque point e , puisqu'elle ne peut être coupée par la tangente RS , que hors de la parabole & au delà de P , par rapport à l'axe. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

2°. *Par la proposition précédente, le triangle EFI est égal au parallélogramme $PIMH$, lequel est aussi égal au triangle efI , par la troisième partie de la même proposition.* Donc les triangles sont égaux : ils sont de plus semblables, à cause des lignes parallèles qui les forment. Donc $EI = eI$: *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

D É F I N I T I O N S.

I.

52. On appelle *ordonnée* à un diamètre, les lignes parallèles à la tangente qui passe par l'origine de ce diamètre, de même que les perpendiculaires à l'axe sont appelées *ses ordonnées*.

C O R O L L A I R E.

* 53. D'où il suit que l'angle de la tangente à l'origine du diamètre, détermine l'angle

des ordonnées à ce même diamètre, & les ordonnées à l'axe ne lui sont perpendiculaires, que parce que la tangente au sommet de la parabole, est perpendiculaire à ce même axe.

I I.

54 On appelle *abscisses ou coupées* d'un diamètre quelconque (Fig. 13.) les parties PI PY de ce diamètre comprises entre son origine P & les rencontres I , Y des ordonnées EI $ÆY$ à ce même diamètre. *

PROPOSITION XIV.

THÉOREME.

55. Supposant toujours les mêmes choses que dans les propositions précédentes : je dis que les carrés des ordonnées EI , $ÆY$ à un diamètre PI , sont entr'eux comme les abscisses correspondantes PI , PY : ou ce qui revient au même, que l'on a $EI^2 : ÆY^2 :: PI : PY$ (Fig. 13).

DÉMONSTRATION.

A cause des triangles semblables EFI $ÆFY$, On a $EFI : ÆFY :: EI^2 : ÆY^2$. Mais par la précédente $EFI = PIMH$, & par la même $ÆFY = PYMH$.

Donc $EFI : ÆFY :: PIMH : PYMH$.

Donc $EI^2 : ÆY^2 :: PIMH : PYMH$.

& à cause des parallèles MH PY

$PIMH : PYMH :: PI : PY$.

Donc $EI^2 : ÆY^2 :: PI : PY$. Ce qu'il falloit démontrer.

Il en est de même si les ordonnées sont de l'autre côté du diamètre comme eI , car elles sont égales aux précédentes, par la troisième proposition. Ce qu'il falloit démontrer.

D É F I N I T I O N.

Du Parametre.

56. La troisième proportionnelle à l'abscisse PI , & à l'ordonnée IE , est appelée *parametre du diamètre PI* , en sorte que si l'on fait cette proportion continue

$$PI : IE :: IE : PR$$

cette ligne PR sera le parametre cherché.

COROLLAIRE I.

57. Il est évident par cette définition, que les quarrés de toutes les ordonnées comme AEI , sont égaux au rectangle fait du parametre & de l'abscisse correspondante.

* On a nommé la ligne dont nous venons de donner la définition, *parametre*; parce qu'elle sert de commune mesure pour connoître la valeur des quarrés de chaque ordonnée.

58. Les anciens Géometres ont aussi appelé cette ligne *latus rectum*, sans doute parce qu'étant appliquée d'équerre à l'origine du diamètre, elle devient côté d'un rectangle qui a l'abscisse pour base, & qui est égal au carré de l'ordonnée, comme nous venons de le voir.

COROLLAIRE II.

59. Il suit aussi de cette définition, que

les propriétés des diamètres de la parabole sont précisément les mêmes que celles de l'axe; & c'est cette parfaite égalité entre les quarrés des ordonnées & les produits de leurs abscisses par le parametre, qui a fait donner à cette courbe le nom de parabole.

COROLLAIRE III.

60. Si une ordonnée RS (Fig. 12) est égale au parametre p , l'abscisse PR sera aussi égale au parametre : car appellant p le parametre, puisque $RS = p$ (hyp.); donc $RS^2 = p^2 = PR \times p$: & divisant chaque terme par p , il vient $p = PR$.

COROLLAIRE IV.

61. Si l'ordonnée EI est plus petite que le parametre, l'abscisse PI sera aussi plus petite que le même parametre, puisque l'on a $PI : IE :: IE : p$ par la définition du parametre, & réciproquement.

COROLLAIRE V.

62. Enfin si une ordonnée est plus grande que le parametre ; l'abscisse correspondante sera aussi, à plus forte raison, plus grande que le même parametre, & réciproquement.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

63. Une parabole MAN (Fig. 14) étant donnée avec un diamètre AP & une tangente AT à l'origine de ce diamètre, je dis que si l'on divise l'angle

PAT que fait la tangente avec le diamètre en deux également par la ligne AM , & que du point M , où elle rencontre la parabole on mène l'ordonnée MP au diamètre AP , cette ordonnée sera égale au paramètre de ce diamètre.

DÉMONSTRATION.

Puisqu'on a divisé l'angle en deux parties égales, donc $TAM = MAP$: mais MP étant ordonnée au diamètre AP , est parallèle à la tangente & partant les angles alternes internes TAM , AMP sont égaux ; donc aussi $AMP = MAP$. Donc $MP = AP$; puisque le triangle MPA est isocèle : par la propriété de la parabole MP^2 ou $AP^2 = AP \times p$ en supposant que p soit le paramètre, & en divisant chaque membre par AP , on a AP ou $MP = p$: Ce qu'il falloit démontrer.

R E M A R Q U E.

64. Cette proposition donne un moyen très facile de connoître le paramètre d'un diamètre quelconque, en supposant que l'on connoît l'angle que fait la tangente à l'origine du diamètre, avec ce même diamètre. Pour cela il suffit de diviser cet angle en deux parties égales par la ligne AM , de mener du point M , où elle rencontre la parabole, l'ordonnée MP au diamètre AP . Car l'abscisse & l'ordonnée sont évidemment égales au paramètre, par la précédente proposition.

65. Si l'on n'avoit point l'angle de la tangente avec le diamètre, mais seulement la parabole MAN avec son diamètre AP , dont on voulût avoir le

paramètre, on chercheroit d'abord l'angle des bras données en cette manière. Par un point quelconque R, & par l'origine A du diamètre on meneroit une droite indéfinie RAQ ; sur laquelle on prendroit une partie $AQ = AR$; par le point Q on meneroit QN parallèle au diamètre AP, jusqu'à ce qu'elle rencontrât la parabole en N, par le premier point R & le point N, on tireroit RÔN qui seroit ordonnée au diamètre AP ; car à cause des parallèles AP QN, les triangles RQN, RAO sont semblables. Donc

$$RQ : RA :: RN : RO$$

Mais $RQ = 2RA$ donc aussi $RN = 2RO$. Donc $ON = RO$.

Enfin par le point A, on meneroit la tangente AT parallèle à l'ordonnée RN, & l'on trouveroit le paramètre comme dans la première partie de cette remarque.

PROPOSITION XVI.

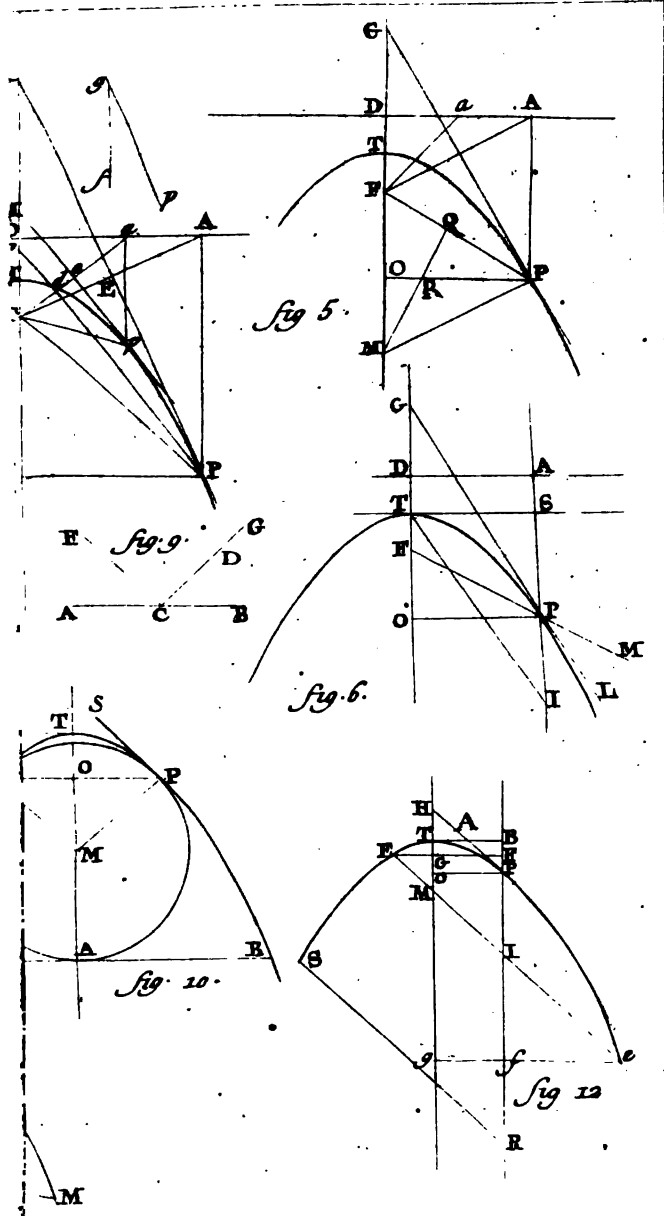
THÉOREME.

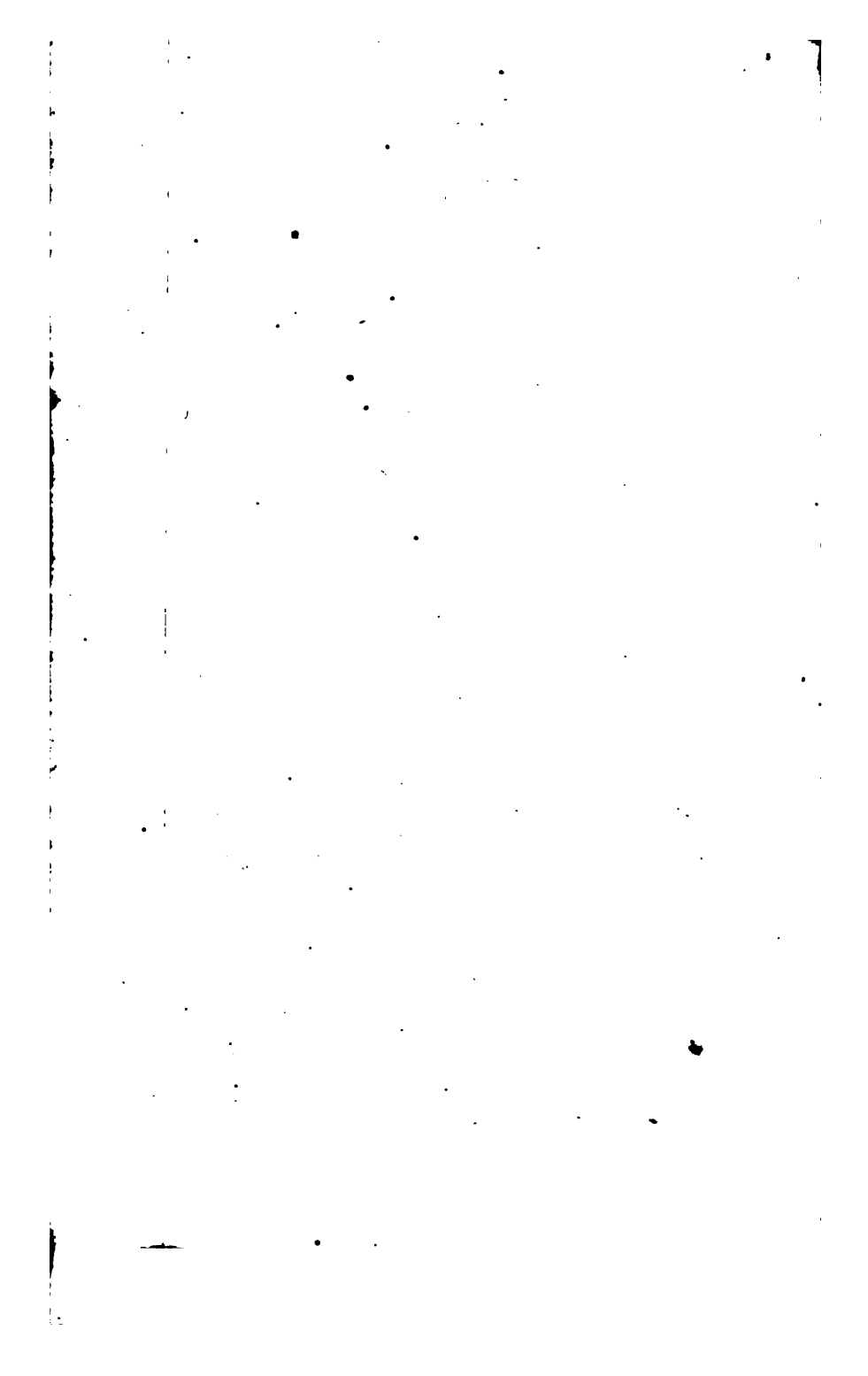
66. Le paramètre d'un diamètre quelconque ; est quadruple de la distance SF du sommet S de ce diamètre, au foyer F de la parabole. (Fig. 15).

DÉMONSTRATION.

1°. Si le diamètre est l'axe même de la parabole, la proposition est évidente : car par la définition du paramètre de l'axe on a $P = 4AF$.

2. Si c'est un autre diamètre, comme SQ au point S, soit menée la tangente ST jusqu'à la rencontre de l'axe en T ; soit abaissée la perpendiculaire





perpendiculaire SP ordonnée à l'axe AF ; soit menée la ligne SF au foyer : & par l'origine de l'axe A , l'ordonnée AG au diamètre SQ , qui sera égale à la tangente ST , à cause du parallélogramme $AGST$. Le triangle SFT sera évidemment isocèle ; car à cause des parallèles AP , SQ l'angle $GSp = STA$, & par la propriété de la parabole, $GSp = FST$. Donc $SF = TF$: on a aussi, à cause de la tangente ST , $AP = AT$ donc $PT = 2AP$. Cela posé $AG^2 = TS^2 = SG \times PH$, en supposant que PH soit le paramètre du diamètre SQ : on a aussi à cause du triangle rectangle TPS . $TS^2 = PT^2 + PS^2 = 4AP^2 + AP \times 4AF$ car $PT = 2AP$. Et $PS^2 = AP \times 4AF$, par la première proposition. Donc $GS \times PH = 4AP^2 + AP \times 4AF = AP \times (4AP + 4AF)$. Mais $GS = AT$ à cause des parallèles AP , SQ & $AT = AP$. Donc $GS = AP$, & divisant les deux membres de l'égalité par ces lignes égales ; on a $PH = 4AP + 4AF = 4AT + 4AF = 4FT = 4FS$ puisque $FT = FS$; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

67. L'expression du paramètre de l'axe étant $4AF$, & celle du paramètre d'un diamètre quelconque $4AP + 4AF$, en supposant AP déterminé comme nous l'avons fait, il suit que le paramètre d'un diamètre quelconque surpasse celui de l'axe, du quadruple de l'abscisse d'une ordonnée correspondante à l'origine de

l'axe. Ainsi connoissant le parametre d'un diametre, on pourra toujours connoître celui de tout autre diametre donné.

COROLLAIRE II.

68. Il suit évidemment de la même proposition que le parametre de l'axe est le plus petit de tous les parametres, puisque, si petite que soit l'abscisse d'une ordonnée menée par l'origine d'un diametre quelconque, son quadruple ajouté à $4AF$ donnera toujours une quantité plus grande que $4AF$.

COROLLAIRE III.

69. Si sur l'axe & sur un diametre quelconque, on prend des coupées égales, l'ordonnée au diametre sera plus grande que l'ordonnée à l'axe, puisque leurs quarrés sont égaux aux produits d'une même abscisse par des parametres différens, & que d'ailleurs par la présente proposition, le parametre du diametre est plus grand que celui de l'axe.

COROLLAIRE IV.

70. Si par l'origine d'un diametre on mène une ordonnée SP à l'axe (Fig. 15.) & que par l'origine A de l'axe AP , on mène une ordonnée AG au diametre SQ ; les quarrés de ces ordonnées SP AG seront entr'eux comme les parametres de l'axe & du diametre. Supposant la tangente ST à l'origine du diametre, à cause du parallélogramme $AGST$, $AT = GS$ & par la pro-

Livre premier.

33

priété de la sou-tangente $AT = AP$; donc $AP = GS$. Donc les abscisses de ces ordonnées sont égales. Mais par la première proposition $SP' = AP \times 4AF$. Et par le corollaire premier de la définition du parametre $AG' = GS \times PH$. Donc $SP' : AG' :: AP \times 4AF : GS \times PH :: 4AF : PH$. en divisant par $AP = GS$.

COROLLAIRE V.

71. Puisque l'on a $SP' : AG' :: 4AF : PH$, si l'on met à la place de SP' sa valeur $AP \times 4AF$ & TS' à la place de AG' ; puisque $AG = TS$, on aura $AP \times 4AF : TS' :: 4AF : PH$. Donc $TS' \times 4AF = PH \times AP \times 4AF$, & divisant par $4AF$: il vient $TS' = PH \times AP$. D'où l'on tire $AP : TS :: TS : PH$. C'est-à-dire, que le parametre d'un diametre quelconque est troisième proportionnelle à l'abscisse AP & à la tangente TS menée par l'origine de ce diametre & terminée à l'axe ; ce qui donne encore un moyen facile de trouver le parametre de ce diametre.

R E M A R Q U E.

Ce corollaire est vrai, non-seulement par rapport à l'axe, mais encore par rapport à tout autre diametre.

PROPOSITION. XVII.

T H É O R È M E.

72. Soit une parabole RAS , dont AF est l'axe, F le foyer, SQ un diametre quel-

conque & KL la directrice, si par le foyer F on mène une double ordonnée $RFQO$ au diamètre SQ : je dis que cette droite est égale au paramètre du diamètre SQ . (Fig. 15.)

DÉMONSTRATION.

Par les extrémités OR de cette double ordonnée, soient menées les perpendiculaires $ONRX$ à la directrice NKX : soit de plus prolongé le diamètre SQ jusqu'à ce qu'il rencontre la directrice en L . On aura par la génération de la parabole $OF=ON$ & $RF=RX$. Donc $OF+FR=ON+RX$, & à cause que les côtés $RO NX$ du trapeze $XRON$ sont coupés en deux également aux points QL : on aura $LQ = \frac{ON+RX}{2} = \frac{OF+FR}{2} = QR$. Présentement à cause du parallélograme $TFQS$ qui est divisé en deux triangles égaux & semblables par la diagonale FS , il est évident que le triangle FSQ est isocèle, puisque le triangle son égal TFS a été démontré isocèle dans la précédente proposition : donc $FS=SQ$. Mais par la propriété de la parabole $FS=SL$ donc LQ ou $QR=2FS$. Donc $2QR$ ou $OR=4FS$ que l'on a démontré dans la précédente être le paramètre du diamètre LQ . Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

73. Si l'on imagine que le diamètre LQ s'approche de l'axe AF , & qu'enfin il se confonde avec lui, la double ordonnée RO de-

viendra la double ordonnée mFM qui sera aussi égale au parametre de l'axe. Ainsi la proposition est générale.

On peut démontrer ce corollaire plus directement ; car par la premiere proposition on a $FM = AF \times 4AF = 4AF^2$ donc $FM = 2AF$; donc mFM ou $2FM = 4AF$.

R E M A R Q U E.

74. Puisque l'on a démontré que $SQ = SF$; on aura $4SQ = 4SF$, c'est-à-dire que le parametre d'un diametre est égal au quadruple de l'abaisse SQ correspondante à l'ordonnée au même diametre, qui passe par le foyer de la parabole ; ce qui donne un moyen facile de trouver le parametre d'un diametre, lorsqu'on connoît le foyer de la parabole, & l'angle de ce diametre avec ses ordonnées.

75. Réciproquement, connoissant un diametre quelconque, l'angle que fait avec lui la tangente à son origine, & le parametre de ce diametre ; on pourra toujours trouver le foyer de la parabole, son axe & sa directrice.

De l'origine S du diametre, on prendra une partie SQ égale au quart du parametre, par le point Q on menera une droite QR indéfinie parallèle à la tangente ; du point S comme centre & rayon SQ , on décrira un arc de cercle qui coupera QR au point F qui sera le foyer demandé. La ligne FP menée par ce même point F parallèlement au diametre sera l'axe de la parabole ; enfin prolongeant SQ en L , en sorte que $SQ = SL$, la perpendiculaire LK qui sera élevée à

ce point, sera évidemment la directrice. Car par la construction on a $SQ = SF$; mais $SQ = SL$ donc $SF = SL$ qui est la principale propriété de la parabole par rapport à la directrice.

76. Il est encore évident que tout parametre est égal à quatre fois la distance SL du sommet S de son diamètre à la directrice KL .

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

77. Si par un point E d'une parabole (fig. 16.) on mene une tangente EQ qui rencontre quelque diamètre PQ en Q , & par le même point E une ordonnée EI au même diamètre. Je dis que $PQ = PI$.

DÉMONSTRATION.

Soit TF l'axe de la parabole, $BT A$ tangente à l'origine de l'axe & PH tangente en P & par conséquent parallèle à EI , par la troisième proposition. Par le point T soit aussi menée TD parallèle à cette même PH . On aura $PD = PB$. Car à cause des parallèles, $PHMD$, $PI MH$; $PD = TH$ mais $TH = TO$. Par la propriété de la tangente PH & $TO = PB$ à cause du parallélogramme $TO PB$. Donc $PD = PB$ donc $BD = 2PB = 2TO$. Enfin par les points M , E , P soient menées les droites ML , EG , PO parallèles à TB . Par le corollaire troisième de la première proposition, on a, PO^2 ou $BT^2 : EG^2 :: TO : TG$

$$TO : TG :: BD : MG;$$

Puisque $BD = 2TO$ & que $MG = 2TG$; & à

cause des triangles semblables EGF TBD
on a aussi,

$$BT : EG :: BD : GF.$$

Donc $BD : GF :: BD : MG$ & partant
 $BD \times GF = BD \times MG$ & divisant chaque
membre de l'équation par BD , on a $GF =$
 $BD \times MG$. Donc $BD : GF :: GF : MG$,
c'est-à-dire que GF est moyenne proportion-
nelle entre BD & MG .

De même à cause des triangles semblables
 EGM , MLQ : on aura

$$BT \text{ ou } ML : EG :: QL : MG$$

$$\text{donc } QL : MG :: BD : MG$$

& partant $QL \times MG = MG \times BD$ & divisant
par MG , on a $QL = MG \times BD$ d'où l'on
tire $BD : QL :: QL : MG$.

Donc $GF = QL$ puisque chaque ligne est
moyenne proportionnelle entre les mêmes BD
 MG . Mais à cause des parallèles $LB = MT = TG$
à cause de la tangente EM donc

$$GF + TG = QL + LB \text{ ou } TF = QB.$$

De même $BP = TQ = TH$ à cause de la tan-
gente PH . Donc $TF + TH = QB + BP$ &
réduisant FH ou $PI = PQ$ car à cause du pa-
rallélogramme $PIFH$; on a $FH = PI$ Ce
qu'il falloit démontrer.

* On démontrera de même que si d'un point c de
la parabole (Fig. 17.) on mène une tangente qui
rencontrant un diamètre en q & du même point c ,
l'ordonnée ci à ce même diamètre, les parties Eq
 Pi seront égales.

DÉMONSTRATION.

78. Soit abaissée du point e l'ordonnée à l'axe eg . Soit prolongé le même axe jusqu'à ce qu'il rencontre la tangente en m . Soit menée ml perpendiculaire au diamètre PQ aussi prolongé en l , s'il est nécessaire. Cela posé par le corollaire troisième de la première proposition on a

PO' ou $BT' : eg^2 :: TO : Tg :: BD : mg$
 puisque $BD = 2TO$ & que $mg = 2Tg$. & à cause des triangles semblables TBD egf .

On a $BT' : eg^2 :: BD' : gf^2$

Donc $BD' : gf^2 :: BD : mg$.

Donc $BD' \times mg = BD \times gf^2$

Donc $BD' \times mg = gf^2$.

De même à cause des triangles semblables egm , mlq on a l'analogie

ml' ou $BT' : eg^2 :: lq' : mg^2$.

Donc $lq' : mg^2 :: BD : mg$

donc $BD \times mg^2 = mg \times lq^2$

donc $BD \times mg = lq^2$ en divisant par mg .

Mais nous avons $BD \times mg = gf^2$ donc $lq^2 = gf^2$
 & partant $lq = gf$: à cause du parallélogramme $lBTm$ & de la tangente em on a $Bl = Tm = Tg$.

Donc $lq - Bl = gf - Tg$, ou $Bq = Tf$. Il est encore visible que l'on a Og ou $Pr = mH$. Car $Tg = Tm$ & $TO = TH$.

donc $Tg - TO = Tm - TH$ ou $Og = mH$.

Donc $mT - mH - Tf = Br - Pr - Bq$ & réduisant $jH = Pq$, mais à cause du parallélo-

gramme $fHPi$ on a $fH = Pi$, donc $Pi = Pq$.
Ce qu'il falloit démontrer.

DEFINITION.

79. La droite IQ comprise entre l'ordonnée EI à un diamètre PI , & la rencontre du même diamètre par la tangente en E s'appelle *sous-tangente* par rapport au diamètre PI .

COROLLAIRE I.

80. Donc les soutangentes d'un diamètre quelconque ont les mêmes propriétés que celles de l'axe, puisque l'on a $PQ = PI$. Ainsi l'on peut établir généralement que toute soutangente est double de l'abscisse correspondante à l'ordonnée menée par le point touchant, & elle sert aux mêmes usages que la soutangente de l'axe.

COROLLAIRE II.

81. On peut encore se convaincre aisément de la généralité du corollaire 5^{ème} de la 16^{ème} proposition (num. 71.)

Soit une parabole RAS (fig. 18.) dont AP SQ sont deux diamètres quelconques, si par les points A , S origines de ces diamètres on mène les ordonnées AG , SP parallèles aux tangentes en ces mêmes points, le paramètre du diamètre SQ est troisième proportionnelle à l'abscisse AP & à la tangente TS .

DÉMONSTRATION.

Par la présente proposition à cause de la tan-

gente ST , $AP = AT$, mais $AT = GS$ cause
 fe du parallélogramme $AGST$.

Donc $SP^2 : AG^2 :: AP \times P : GS \times p :: P : p$.
 puisque les abscisses AP , GS sont égales, &
 mettane à la place de SP^2 la valeur $AP \times P$
 & à la place de AG^2 , TS^2 qui lui est égal
 on a $AP \times P : TS^2 :: P : p$

donc $AP \times P \times p = TS^2 \times P$

donc $AP \times p = TS^2$ d'où l'on tire

$AP : TS :: TS : p$. Ce qu'il falloit dé-
 montrer.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

82. Si l'on a deux droites AB MN , (Fig.
 19 & 20.) qui se coupent en un point O , au-de-
 dans ou au-dehors de la parabole, & que, par les
 milieux D C de ces droites on tire les diametres
 LD , QC , dont les paramètres soient P , p Je
 dis que l'on aura $AO \times OB : MO \times ON :: P : p$.

DÉMONSTRATION.

Par le point O où se coupent les sécantes
 AB MN , soit mené le diamètre OK . Par le
 point K où ce diamètre rencontre la parabole
 soient menées les ordonnées KF , KG aux
 diametres LD , QC . On aura par la quator-
 zième proposition. (num. 55.)

$$AD^2 : KF^2 :: LD : LF.$$

& divid. $AD^2 - KF^2 : KF^2 :: LD - LF : LF$.
 & dans le cas, où le point O est au-dehors
 de la parabole,

$$KF' - AD' : KF' :: LF - LD : LF.$$

Mais AB étant parallèle à KF aussi bien que KS à LD , on aura $KF = OD$ donc

$$AD' - KF' = AD' - OD' = AO \times OB$$

par le lemme fondamental ; puisque AB est divisé en deux parties égales en D , & en deux parties inégales en O .

$$\text{Donc } AO \times OB : KF' :: FD : LF.$$

$$\text{Donc } AO \times OB : KF' :: FD \times P : LF \times P.$$

$$\text{Mais (num. 57.) } KF' = LF \times P$$

$$\text{Donc } AO \times OB = FD \times P.$$

On démontrera de même que $MO \times ON = GC \times p$. Donc $AO \times OB : MO \times ON :: FD \times P : GC \times p$. Mais à cause des parallélogrammes $KOCG$ $KODF$, $GC = KO = FD$, donc en divisant l'antécédent & le conséquent de la seconde raison par les égales FD GC , on aura $AO \times OB : MO \times ON :: P : p$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

83. Si l'on imagine que les sécantes intérieures se meuvent parallèlement à elles mêmes, jusqu'à ce qu'elles deviennent tangentes aux points LQ ; alors les produits $AO \times OB$, $MO \times ON$; deviendront les quarrés de ces tangentes; d'où il suit que ces quarrés seront entr'eux comme les parametres des diametres qui passent par les points touchants. Donc $RL' : QR' :: P : p$. Donc aussi $AO \times OB : MO \times ON :: RL' : QR'$.

COROLLAIRE II.

84. Si par les points $Q L$, origine du diametres qui passent par le milieu des sécantes on mene les ordonnées à ces diametres $Qq Ll$. On a (num. 81) $Qq' : Ll' :: P : p$ & (num. 83.)

$$RL' : QR' :: P : p$$

Donc $RL' : QR' :: Qq' : Ll'$.

Donc $AO \times OB : MO \times ON :: Qq' : Ll'$.

C'est-à-dire que les produits des sécantes $AB MN$, sont entr'eux comme les quarrés des ordonnées aux diametres qui les divisent en deux également, menées par l'origine de ces mêmes diametres.

COROLLAIRE III.

85. Si les diametres qui divisent les sécantes en deux par les égales sont également éloignés de l'axe, leurs parametres seront égaux, puisque la parabole est une courbe symetrique, & alors les produits $AO \times OB$, $MO \times ON$ seront égaux, & les droites $AB MN$ seront coupées en parties réciproques soit au-dedans, soit au-dehors de la parabole.

COROLLAIRE IV:

86. Si une des lignes étant toujours sécante (Fig. 20.) l'autre devient tangente en L . Alors le quarré de la tangente fera au produit de la sécante entiere par sa partie extérieure, comme le paramette du diametre qui passe par le point touchant L , est à celui du

Diamètre qui divise MN en deux parties égales, & l'on aura $Lo' : Mo \times oN :: P : p$. Et si $P = p$, alors la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière & sa partie extérieure ; d'où il suit que l'on peut trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données par le moyen de la parabole, ce qui seroit pourtant un défaut en géométrie, puisque le cercle donne un moyen plus court & plus facile.

Seulement il est à remarquer que cela ne peut arriver que lorsque le point de rencontre de la tangente & de la sécante est à droite ou à gauche de l'axe, & jamais lorsqu'il est sur l'axe ; parce que dans le cas où les paramètres sont égaux, il n'y a que des tangentes ou des sécantes égales qui puissent se rencontrer sur l'axe.

COROLLAIRE. V.

87. On a démontré dans cette proposition (fig. 19.) que l'on avoit toujours $AO \times OB = FD \times P$. Mais $FD = KO$ à cause des parallèles $AD FK$ donc $AO \times OB = KO \times P$ d'où il suit que.

1° Si l'on a un autre diamètre XY qui coupe la même ligne AB au point Y ; on auroit cette analogie $AO \times OB : AY \times YB :: KO : XY$. Car on démontrera de même que l'on auroit $AY \times YB = XY \times P$. Ce qui suffit pour déduire la proposition présente.

2° Si deux lignes $AB VT$ parallèles entr'elles sont coupées par un même diamètre OKS , on aura

$$AO \times OB : VS \times ST :: KO : KS.$$

Car on démontrera de même que dans la présente proposition que $VS \times ST = KS \times P$.

3^o Si deux lignes AB , VT parallèles entr'elles sont coupées par deux diamètres différens KO , XZ , on aura cette proportion

$$AO \times OB : VZ \times ZT :: KO : XZ.$$

Car puisque VZ est parallèle à AB , elle sera aussi ordonnée au diamètre LD , donc $VZ \times ZT = XZ \times P$ en supposant que P est le paramètre du diamètre LD mais $AO \times OB = KO \times P$ paramètre du même diamètre; donc $AO \times OB : VZ \times ZT :: KO \times P : XZ \times P :: KO : XZ$.

Il faut bien remarquer que le paramètre dont on se sert dans tous ces corollaires, est le paramètre du diamètre qui divise la sécante AB ou ses parallèles en deux également.

COROLLAIRE VI.

88, On voit par là comment on peut décrire une parabole (Fig. 19.) qui passe par trois points donnés A , K , B , & dont les diamètres soient parallèles à une ligne donnée de position.

Car ayant joint deux points comme A , B par la droite AB & menant par le troisième point donné K , une ligne KO parallèle à la ligne donnée de position, qui coupera AB en O , puis menant encore par le milieu de AB , la droite indéfinie DL parallèle à KO : on fera cette proportion.

$$KO : AO :: OB : P. \text{ Cette quatrième}$$

proportionnelle aux trois lignes données KO , AO , OB fera le parametre du diametre LD avec lequel on pourra décrire la parabole demandée.

Il est évident que cette parabole passera par les points A , B puisque $AD \times DB = AD' = LD \times P$. Elle passera aussi par le point K car par la construction, on a $AO \times OB = KO \times P$. & par la proposition présente cette propriété convient à la parabole qui a LD pour diametre & AB pour double ordonnée; d'ailleurs le même diametre est parallèle à la ligne donnée de position. Donc cette parabole remplit toutes les conditions proposées.

R E M A R Q U E.

89. Comme la ligne à laquelle les diametres doivent être parallèles peut varier à l'infini dans sa position, il suit que par trois points donnés, on peut faire passer une infinité de paraboles différentes. Donc plusieurs paraboles peuvent se couper en trois points sans se confondre; ce qui n'est pas vrai pour le cercle.

90. On voit aisément (Fig. 20.) que si le point K étoit tel que la ligne OK menée parallèlement à la ligne donnée de position rencontrât la ligne AB prolongée en O , le problème seroit toujours le même & se résoudroit de la même maniere.

P R O P O S I T I O N XX.

T H É O R È M E.

91. Si une sécante quelconque MN (Fig. 21).

prolongée au-dehors de la parabole rencontre un diamètre AR quelconque en un point R & que des points M N, on mene les ordonnées MP NQ au diamètre AR, je dis que l'on aura

$$AP : AR :: AR : AQ.$$

DÉMONSTRATION.

Les ordonnées MP QN étant parallèles les triangles RMP, RNQ feront semblables & donneront $RP' : RQ' :: PM' : QN'$

& par la pro. 14. $PM' : QN' :: AP : AQ.$

Donc $RP' : RQ' :: AP : AQ :: RP - AR : RQ - AR$, car $AP = RP - AR$ & $AQ = RQ - AR$.

Donc

$$RP' \times RQ - RP' \times AR = RQ' \times RP - RQ' \times AR.$$

Et en transposant

$$RP' \times RQ - RP' \times RQ' = RP' \times AR - RQ' \times AR.$$

ou $RP' \times RQ \times (RP - RQ) = AR \times (RP' - RQ')$

$= AR \times (RP + RQ) \times (RP - RQ)$ puisque par le lemme fondamental,

$RP' - RQ' = (RP + RQ) \times (RP - RQ)$ donc

en divisant chaque terme par $RP - RQ$;

$RP' \times RQ = AR \times (RP + RQ)$ d'où l'on tire

$$RP + RQ : RP :: RQ : AR.$$

Mais $RP = AR + AP$, & $RQ = AR + AQ$;

donc en substituant ces valeurs

$$AR + AP + AQ : AR + AP :: AR + AQ : AR.$$

D'où l'on tire dividendo

$$AR + AQ : AR + AP :: AQ : AR.$$

Donc $AR' + AQ \times AR = AR \times AQ + AP \times AQ$

ôtant de part & d'autre $AR \times AQ$ on a

$AR' = AP \times AQ$ d'où l'on tire $AP : AR :: AR : AQ.$

Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire

COROLLAIRE.

92. Si l'on imagine que les points M , N se rapprochent l'un de l'autre, jusqu'à ce qu'ils se confondent au même point S ; & que les points P , Q se rapprochent de même jusqu'à ce qu'ils se confondent aussi en O : on aura alors $AP = AQ = AO$; AR deviendra AT , & la sécante MN deviendra la tangente ST ; enfin l'équation $AR^2 = AP \times AR$ deviendra $AT^2 = AO^2$: donc $AT = AO$, c'est-à-dire que la partie d'un diamètre comprise entre son origine & une tangente; est égale à l'abscisse correspondante à l'ordonnée au même diamètre, laquelle passe par le point touchant S .

REMARQUE.

Ce corollaire est une démonstration fort simple de la 18^{me} proposition, & on le met ici pour faire voir comment on arrive au même résultat par des voies qui paroissent toutes différentes. Cette proposition ainsi que la suivante donnent une manière fort simple de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données par le moyen d'une parabole déterminée.

Car ayant pris sur un diamètre quelconque AQ les abscisses AP , AQ égales aux proposées & mené les ordonnées PM , QN au même diamètre, le point R où il est coupé par la ligne qui joint les extrémités M , N des ordonnées PM , QN fera celui qui détermine la moyenne demandée; comme il est évident. (fig. 21 & 22).

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

93. Si un diamètre quelconque A Q est coupé (Fig. 22) dans un point R au dedans de la parabole par une droite M N terminée à cette même parabole, & si des points M, N l'on abaisse les ordonnées MP, NQ à ce diamètre, parallèles à la tangente en A; je dis que l'on aura $AP:AR::AR:AQ$. Et encore $MP:RS::RS:QN$.

DÉMONSTRATION.

1°. A cause des triangles semb. MPR, NQR .
 $RP^2:RQ^2::MP^2:NQ^2$ & par la 14^{ème}. proposition $MP^2:NQ^2::AP:AQ::AR-RP:AR+RQ$.
 Car $AP = AR - RP$ & $AQ = AR + RQ$.
 Donc $RP^2:RQ^2::AR-RP:AR+RQ$.
 Donc multipliant les extrêmes & les moyens
 $RP^2 \times AR + RP^2 \times RQ = RQ^2 \times AR - RQ^2 \times RP$
 & transposant les termes $RP^2 \times RQ, RQ^2 \times AR$,
 $RP^2 \times AR - RQ^2 \times AR^2 = -RP^2 \times RQ - RQ^2 \times RP$,
 ou bien en réduisant chaque membre
 $(RP^2 - RQ^2) \times AR = -RP^2 \times RQ - (RP + RQ)$;
 & en divisant encore chaque membre par $RP + RQ$;
 $AR \times (RP - RQ) = -RP \times RQ$; ou multipliant & transposant.
 $RP \times AR = RQ \times AR - RQ \times RP$, d'où l'on tire
 $AR - RP:AR::RP:RQ$. Mais $RP = AR - AP$ & $RQ = AQ - AR$; donc en substituant ces valeurs,
 $AP:AR::AR-AP:AQ-AR$.
 Donc en prenant le produit des extrêmes & des moyens
 $AP \times AQ - AP \times AR = AR^2 - AP \times AR$,
 d'où l'on tire $AP \times AQ = AR^2$, ôtant de chaque membre $AP \times AR$, & enfin $AP:AR::AR:AQ$.
 C. Q. F. 1°. D.

2^o $MP:RS::RS:NQ$. Car par la 1^{re} proposition

$MP':RS':NQ'::AP:AR:AQ$.

Donc $MP':RS'::RS':NQ'$. Puisque par la 1^{re} partie de la présente proposition on a

$AP:AR::AR:AQ$. Donc en tirant les racines

$MP:RS::RS:NQ$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXII.

THÉOREME.

94. Si sur le prolongement de l'axe (fig. 23.) on prend une partie TH égale au parametre, & que par l'origine du même axe on mene une corde quelconque TP & par le même point P l'ordonnée PO : je dis que l'on aura pour chaque corde $HO:TP::TP:TO$.

DÉMONSTRATION.

A cause du triangle rectangle TOP on a $PT^2 = TO^2 + PO^2$; mais par la propriété de la parabole & du parametre $PO^2 = TO \times TH$ puisque TH est supposé égal au parametre. Donc $PT^2 = TO^2 + TO \times TH = (TH + TO) \times TO = HO \times TO$.

Donc $HO:PT::PT:TO$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIII.

THÉOREME.

95. Si l'on prend un point F , (fig. 24.) sur la perpendiculaire DO abaissée de l'angle droit d'un triangle isocèle rectangle, sur l'hypothénuse BC , si l'on divise cette ligne DF en deux parties égales en T , & que du point F comme centre & pour rayon OB moitié de la base BC on décrive

Dij

une portion de cercle qui la coupe en deux points P & p ; je dis que ces points seront à une parabole dont DO sera l'axe, F le foyer & T le sommet.

DÉMONSTRATION.

A cause du triangle rectangle POF , on a $PO^2 = FP^2 - FO^2 = BO^2 - FO^2 = DO^2 - FO^2$; car le triangle rectangle BOD est aussi isocèle & partant $BO = DO$, mais $DO = DF + FO$.

$$\text{Donc } DO^2 = DF^2 + 2DF \times FO + FO^2$$

$$\text{Donc } PO^2 = DF^2 + 2DF \times FO + FO^2 - FO^2$$

$$\text{ce qui se réduit à } PO^2 = (DF + 2FO) \times DF.$$

On a aussi $DF = 2FT$, puisque par la supposition, DF est coupée en deux parties égales en T ; donc $PO^2 = (2FT + 2FO) \times 2FT$ ou, ce qui revient au même $PO^2 = (FT + FO) \times 4FT$. Mais $FT + FO = TO$. Donc $PO^2 = TO \times 4FT$. D'où il suit que le point P , est à une parabole qui a pour axe FD & dont $4FT$ est le paramètre, & partant, le point F est le foyer de la parabole puisqu'il est éloigné du sommet de cette courbe du quart de son paramètre (num. 13).

COROLLAIRE I.

96. Si par le point D on mène une droite AD parallèle à la base BC , il est évident que cette droite sera la directrice de la parabole qui a la ligne OD pour axe; puisque cette ligne est éloignée du sommet de la parabole du quart du paramètre de l'axe.

COROLLAIRE II.

97. Si par un point o on mene une droite ob parallèle à la base BC du triangle donné, il est clair que l'on pourra trouver sur cette ligne deux points R & r qui appartiendront à la même courbe; en décrivant du point F comme centre avec le rayon ob , les petits arcs R , r . D'où il suit que l'on peut déduire de cette proposition une méthode fort simple de décrire la parabole; comme on verra dans les descriptions de cette courbe.

PROPOSITION XXIV.

PROBLÈME VI.

98. Trouver la surface d'une portion de parabole terminée par une double ordonnée à l'axe MPN : & par cette courbe.

SOLUTION.

Pour arriver plus facilement à la solution de ce problème nous observerons.

1° Que la parabole étant une courbe symétrique & divisée en deux parties égales par l'axe, le problème se réduit à trouver la surface du triangle parabolique TPM .

2° Nous imaginerons que ce même triangle est composé d'une infinité de petits parallélogrammes $MPpm$, formés par des ordonnées infiniment proches MP , mp . Cette fausse supposition ne peut faire aucune erreur, parce que le triangle MmO qu'il faudroit ajouter ou

retrancher pour faire un parallélogramme complet est infiniment petit par rapport au trapeze $M P p m$, que nous appellerons *élément parabolique*.

3° Nous supposerons encore que le triangle mixtiligne concave TQM , formé par la courbe TM la tangente TQ à l'origine de l'axe & la droite MQ menée par le point M parallèlement à l'axe, nous supposerons dis-je que ce triangle, que nous appellons *complément parabolique*, est composé d'une infinité de petits parallélogrammes $MQ Rm$ que nous nommerons *éléments de complément parabolique*, formés par des lignes $MQ mR$ menées des extrémités $M m$ des ordonnées infiniment proches MP, mp perpendiculairement à la tangente en T . Cette seconde supposition ne peut encore causer aucune erreur, puisque le triangle Mom d'où elle pourroit provenir, est supposé plus petit que toute grandeur assignable, & n'est par conséquent d'aucune considération.

4° Nous imaginerons que la courbe est composée d'une infinité de petites lignes droites comme Mm dont la tangente MH est le prolongement.

5° Enfin on élèvera au point H où la tangente rencontre l'axe, la droite HG parallèle à la tangente en T & l'on prolongera les droites $MQ mR$, jusqu'à ce qu'elles rencontrent cette ligne aux points FG .

Tout cela posé, il est évident que le trian-

gle MmO est semblable au triangle MPH ,
puisque ces triangles ont les côtés parallèles
chacun à chacun. Donc on aura la proportion

$$MP : PH :: MO : Om.$$

Donc $MP \times Om = PH \times MO = MO \times OF$
car à cause des parallèles $MPGH$, $PH = OF$.

Mais à cause de l'angle-droit MP , le rec-
tangle $MP \times Om$ est égal à l'élément parabo-
lique $MPpm$, & le rectangle $MO \times OF$ est
égal au parallélogramme $MOFG$ qui est lui-
même égal à l'élément parabolique, puisque
 $MP \times Om = MO \times OF$. Présentement à cau-
se des parallèles $MGOF$, les rectangles $MOFG$

$MORQ$, compris entre ces parallèles donnent
 $MOFG : MORQ :: OF : OR :: HP : PT :: 2 : 1$
par la propriété de la sou-tangente (num. 29.)

Donc $MOFG = MPpm : MORQ = MmRQ :: 2 : 1$.

C'est-à-dire que l'élément parabolique est dou-
ble de l'élément du complément parabolique;
& comme on démontrera la même chose de
tout autre élément parabolique, par rapport à
l'élément de complément correspondant, on
aura la somme des éléments paraboliques, est
à la somme des éléments de complément,
comme un seul élément, est à son complément
ou comme 2 à 1 ou bien

$$TPM : TQM :: 2 : 1$$

donc en composant

$$TPM : TPM + TQM :: 2 : 2 + 1;$$

ou $TPM : TPMQ :: 2 : 3$.

Ou démontrera de même que

$$TPN : TPNq :: 2 : 3$$

Div

d'où il suit que la surface d'un segment parabolique $TM PN$ terminée par la courbe & une double ordonnée à l'axe est égal aux deux tiers du rectangle de l'abscisse PT par la double ordonnée MN . Ce qu'il falloit trouver & démontrer.

PROPOSITION XXV.

PROBLÈME VII.

99. Trouver la surface d'un segment parabolique terminé par le perimetre de la parabole & par une double ordonnée MPN à un diamètre quelconque.

SOLUTION.

Ayant fait toutes les mêmes suppositions (Fig. 26.) que dans le problème précédent avec les changemens convenables, on verra que la solution est précisément la même. Car les parallélogrammes obliques $OMFG$ & $OMPp$ seront toujours égaux ayant un angle égal compris entre côtés réciproques, puisque les triangles MPH & MOm sont toujours semblables. D'ailleurs l'élément parabolique sera toujours double de l'élément du complément puisque les parallélogrammes $MOFG$ & $MOQR$ qui leur sont égaux, sont entr'eux comme HP à TP , ou comme 2 à 1, (num. 77.) & à cause des parallèles MG , OF entre lesquelles ils sont compris: d'où il suit évidemment que l'on a comme dans la proposition précédente le segment parabolique, égal aux deux tiers

du parallélogramme $MQqN$ fait sur l'abscisse PT & la double ordonnée MN au diamètre PH . Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE. I.

100. Donc le demi complément parabolique TMQ est égal au tiers du parallélogramme $TPMQ$ & l'autre demi complément parabolique TNq est égal au tiers du parallélogramme $TPNq$ & partant la figure concave $QMTNq$ est égale au tiers du parallélogramme $MNqQ$.

COROLLAIRE II.

101. Si par le point T (Fig. 27), origine du diamètre, on mene aux extrémités MN de la double ordonnée MPN , les droites TM , TN , le triangle MTN sera égal à la moitié du parallélogramme $MQqN$, ou, ce qui revient au même, sera les $\frac{2}{3}$ de ce parallélogramme dont le segment parabolique $MZTN$ est les deux tiers, ou les $\frac{4}{6}$: donc

$$MZTN:MTN::\frac{4}{6}:\frac{2}{6}::4:3.$$

COROLLAIRE. III.

102. Si l'on a deux segments parabolique TMN , TVS (Fig. 27.) terminés par le périmètre de la parabole & par des doubles ordonnées MN , VS à un même diamètre; ces segments seront entr'eux comme les triangles MTN , $VT S$; car ces triangles sont moitiés des parallélogrammes formés sur les abscisses TP TX & les doubles ordonnées MN VS .

C'est-à-dire que les paraboles AFB , MQN sont entr'elles comme KL & IH . D'ailleurs la dernière MQN a pour base la droite MN . Donc elle a toutes les conditions requises.

DÉFINITION.

106. deux segments paraboliques sont *semblables*, lorsqu'on peut leur inscrire des polygones semblables d'un même nombre de côtés.

PROPOSITION XXVIII.

THÉOREME.

107. Si deux segments paraboliques ACB , acb (Fig. 30). sont tels qu'on ait ; $AB:CD::ab:cd$, en supposant que les droites AB ab sont les doubles ordonnées des diamètres CD cd qui sont avec elles les angles égaux ADC adc , je dis que ces segments sont semblables.

DÉMONSTRATION.

Soient joints les points A , C , B par les droites AC , CB , & les points a , c , b par les droites ac , cb : puisque les droites AD ad sont ordonnées aux diamètres CD cd , elles seront coupées en deux également (par la 13^{eme} proposition), & comme (hyp.) on a $AB:CD::ab:cd$, on aura aussi, $AD:CD::ad:cd$, d'où il suit que les triangles ADC , adc sont semblables ayant les angles égaux D compris entre les côtés proportionels. Il est évident, par la même raison, que les trian-

gles CDB cdB sont aussi semblables, donc le triangle total ACD , inscrit au segment parabolique ACB , est semblable au triangle total acb inscrit pareillement au segment parabolique acb ; & partant les segments eux-mêmes sont semblables, par la définition précédente: Ce qu'il falloit démontrer.

108. Si par un point F quelconque du diamètre CD on mene une droite GFH parallèle à AB , & qu'ayant fait cette proportion, $CD:CF::cd:cf$, par le point f ainsi déterminé sur le diamètre cd , on mene la droite gfh parallèle à ab , on démontrera aisément que le pentagone $AGCHB$ inscrit au segment parabolique ACB , est semblable au pentagone $agchb$ inscrit au segment parabolique acb .

DÉMONSTRATION.

Les lignes GF AD étant ordonnées au diamètre CD ainsi que les droites gf ad au diamètre cd , on aura par la 14^{eme} proposition,

$AD':GF::CD:CF$ & par hypothese

$CD:CF::cd:cf$

& par la proposition 14. $cd:cf::ad':gf'$.

Donc $AD':GF::ad':gf'$, donc $AD:GF::ad:gf$. D'où il suit que les triangles GFC , gfc sont semblables, puisqu'ils ont les angles égaux Ff compris entre les côtés proportionnels GF CF , gf cf . Donc les angles GCF gcf seront égaux & étant de ces angles égaux, les angles ACF acf , aussi égaux, à cause des triangles semblables CAD cad , on aura les angles GCA gca , qui seront aussi égaux &

nous donnent deux nouveaux triangles semblables $GCAgca$, puisqu'ils sont compris entre les côtés proportionels $AGGC.aggc$; comme il est évident à cause des triangles semblables $ADCadc$, $GFCgfc$. On démontrera de même que le triangle CBH est semblable au triangle cbh , d'où il suit que les pentagones $AGCHB$, $agchb$, sont composés de triangles semblables & partant aussi semblables entr'eux; & par conséquent il est encore démontré que les segments paraboliques auxquels ils sont inscrits, sont semblables.

COROLLAIRE I.

109. Puisque deux segments paraboliques sont semblables lorsqu'on peut leur inscrire des figures semblables d'un même nombre de côtés, réciproquement lorsque deux segments paraboliques sont semblables, il sera toujours possible de leur inscrire des figures semblables d'un même nombre de côtés.

COROLLAIRE II.

110. Toutes les paraboles sont des figures semblables, car on pourra toujours leur donner des bases proportionelles à leurs hauteurs.

COROLLAIRE III.

111. Puisque les paraboles sont des figures semblables: elles ont aussi les mêmes propriétés que les figures semblables; donc elles sont entr'elles comme les quarrés des côtés homo-

logues, des lignes semblablement tirées des parametres, par exemple, des tangentes, abscisses ou ordonnées correspondantes ; ce qui se doit entendre non-seulement des segments paraboliques semblables & déterminés, mais encore des espaces indéfinis renfermés par les paraboles prolongées aussi loin qu'on puisse les imaginer.

PROPOSITION XXIX.

THÉOREME.

112. Un segment parabolique ABCI (Fig. 31); étant donné avec le triangle BAC qui lui est inscrit, & qui a son sommet à l'origine du diamètre AF, qui divise la base AC en deux également en F ; si par un point quelconque D de la base ; on mene une droite DI parallèle au diamètre AF, & terminée à la parabole en I ; je dis que les segments de la droite DI formés par le côté AC du triangle BAC, seront proportionels aux segments de l'ordonnée FC, ou ce qui est la même chose que l'on aura, $FC:FD::DH:DI$.

DÉMONSTRATION.

Par le point I, où la ligne DI rencontre la parabole, soit menée la ligne IK parallèle à BC qui sera ordonnée au diamètre AF, puisque FC est supposée ordonnée au même diamètre, & qui coupera le côté AC en L. Par le point H soit pareillement menée la droite GH parallèle à la même BC, on aura $IK=GH=FD$ à cause des parallèles AF,

1D. Cela posé à cause des triangles semblables AKL , AFC

$FC:KL::AF:AK$ & par la 14^{me} propo:

$$AF:AK::FC:IK.$$

Donc $FC:KL::FC:IK$ Donc $FC \times IK = FC \times KL$

& divisant par FC , $IK = KL$ d'où l'on tire

$$FC:IK::IK:KL \text{ ou bien } FC:FD::IK:KL.$$

$$\text{Car } FD = IK.$$

Donc *dividendo* $FC - FD:FC::IK - KL:IK$

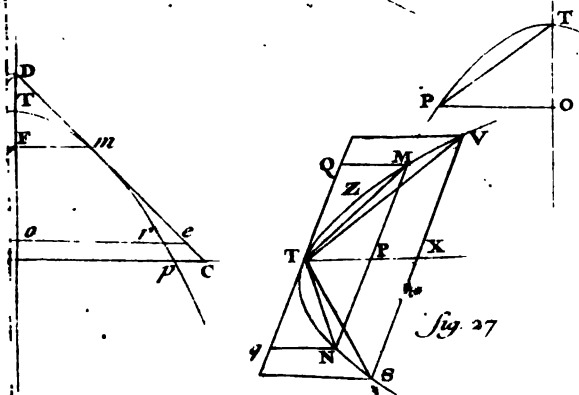
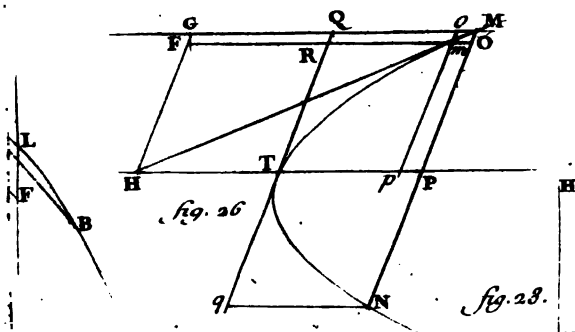
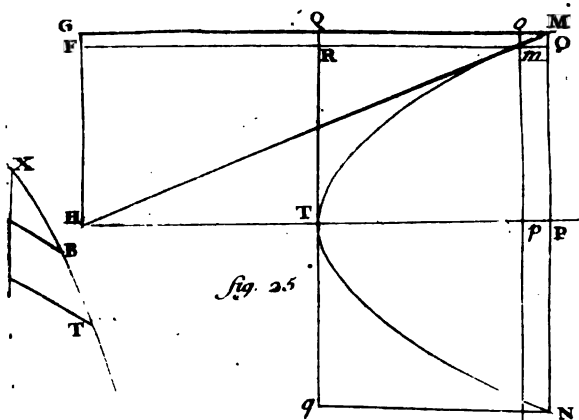
& en réduisant $DC:FC::IL:IK.$

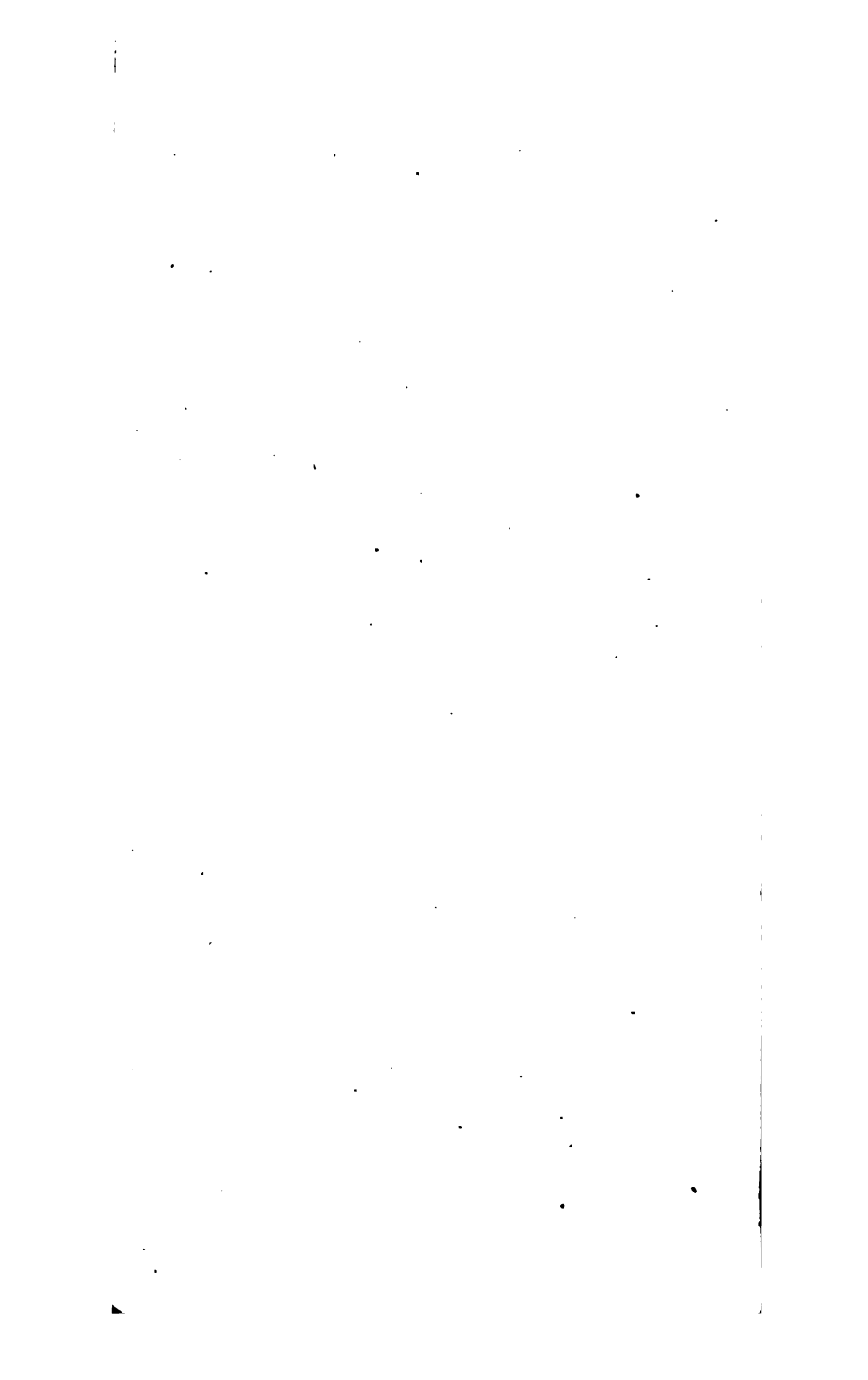
Et *alternando* $DC:IL::FC:IK$ ou FD qui lui est égal. Mais à cause des triangles semblables CDH , LIH , $DC:IL::DH:IH$, donc on aura $FC:FD::DH:IH$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

113. A cause du diametre AF , on a $BF = FC$ & à cause du parallélogramme $GODH$ on a $DH = FG$, donc puisque l'on a $FC:FD::DH:IH$; on aura aussi $BF:GH::FG:IH$ & alter. $BF:FG::GH:IH$ d'où il suit que la ligne BGI est une ligne droite. On verra l'usage de cette proposition & de son corollaire dans le Livre de la description des sections coniques.

Fin de la parabole.







DE L'ELLIPSE,

LIVRE SECOND.

Des propriétés de l'Ellipse considérée sur un Plan.

Génération de cette Courbe.

114



'IL y a sur un plan (fig. 32.) une ligne droite IT coupée en deux parties égales au point C , & deux autres points $F D$ sur la même ligne également éloignés du point C ; je dis que l'on pourra trouver une infinité de points $P P$, soit au dessus soit au dessous de la ligne IT , tels que la somme des lignes $FP DP$, menées de chacun de ces points aux points $F D$, soit égale à la ligne entière IT .

DÉMONSTRATION.

Je divise la ligne IT en deux parties quelconques au point G : de l'une de ces parties IG comme rayon, & du point F comme cen-

E

tre, je décris deux arcs de cercle vers P , l'un au dessus & l'autre au dessous de la droite IT ; de l'autre partie GT comme rayon & du centre D , je décris deux autres arcs de cercle qui coupent les deux premiers en deux points déterminés $P P$, qui sont évidemment tels que la somme des lignes $FP PD$ menées de chacun de ces points aux points FD , est égale à la ligne donnée IT : Je divise encore IT en deux autres parties inégales en g , & faisant les mêmes opérations que pour le point G , il vient encore deux points $p p$, l'un au dessus, l'autre au dessous de IT , tels que $Fp + Dp = IT$: & comme on peut diviser IT d'une infinité de manières différentes, en sorte que les deux parties $IG GT$ ou $Ig gT$, aient entr'elles tel rapport qu'on voudra, on pourra aussi trouver une infinité de points P tels que l'on ait toujours $FP + PD = IT$. Ce qu'il falloit démontrer.

R E M A R Q U E.

115. Une même division peut servir à trouver quatre points de la courbe. Car si du point D comme centre & rayon IG , on décrit deux arcs de cercle vers P au dessus & au dessous de IT & que du point F comme centre, & demi-diamètre GT , on décrive deux autres arcs de cercle qui coupent les deux premiers aux points déterminés $P P$, on aura deux nouveaux points $P P$, qui sont évidemment tels que $FP + PD = IT$. Il en est de même du point g & de toute autre division.

On remarquera encore que les points D & F sont les limites des points de division G g . Car si le point de division tomboit au delà du point D par rapport au point C , comme en d , le cercle décrit du point F comme centre, avec le rayon Id couperoit la ligne IT au delà du point T & ne pourroit par conséquent être coupé ni touché par le cercle décrit du point D comme centre avec le rayon dT .

COROLLAIRE I.

116. Puisque la ligne IT est divisée en deux également en C & que les points F & D sont également éloignés du point C , on aura $ID = FT$ & $IF = DT$; d'où il suit que la courbe qui passe par les points P P , passe aussi par les points I & T . Car si le point G de division tombe au point D , le cercle décrit du rayon ID & du centre F coupera la ligne IT en T , & touchera le cercle décrit du centre D avec le rayon DT au même point T , en sorte que l'on aura toujours $FT + DT = IT$. On aura de même $ID + IF = IT$, donc ces points ont les mêmes propriétés que les points P & partant appartiennent à la courbe.

COROLLAIRE II.

117. Puisque la ligne qui passe par les points P P , coupe la ligne IT aux points I & T , & qu'elle a autant de points au dessus qu'au dessous de la droite IT , il suit qu'elle renferme un espace déterminé, & forme ce qu'on appelle une courbe rectorame.

COROLLAIRE III.

118. Il suit encore de cette construction qu'un ligne POP , menée d'un des points de la courbe perpendiculairement à IT & terminée à cette courbe, est coupée en deux également par la même droite IT ; car cette ligne a deux points F, D également éloignés des extrémités $P P$ de la droite POP , à cause des cercles décrits des rayons $FP DP$ & des centres FD , dont la ligne POP est une corde commune.

D É F I N I T I O N s.

I.

119. La ligne $PP IT$ formée par les points P déterminés comme on vient de le dire est appelée *Ellipse*. On verra dans la suite pour quelle raison elle a été ainsi nommée.

I I.

120. Le point C qui divise IT en deux également est appelé *Centre* de l'ellipse.

I I I.

121. La ligne droite IT est appelée *grand Axe*, ou premier diamètre.

I V.

122. La ligne droite NCM (Fig. 34.) perpendiculaire à l'axe IT , & qui passant par le centre C , est terminée à l'ellipse de part & d'autre, est appelée *petit Axe*.

V.

123. Les points FD également éloignés du point C , sont nommés *Foyers de l'ellipse*.

V I.

124. Les lignes droites menées des points P de l'ellipse perpendiculairement à l'axe IT & terminées à cet axe, sont dites *Ordonnées* ou *Appliquées*. Ainsi PO est une ordonnée à l'axe IT .

V I I.

125. Les parties de l'axe faites par la rencontre d'une ordonnée PO , comme IO OT sont appellées *Abscisses* ou *Coupees*. On compte quelquefois les abscisses sur l'axe, en partant du centre. Ainsi CO est une abscisse du demi axe CT , & OT est l'autre abscisse du même demi axe.

V I I I.

126. Les lignes droites, comme PCp (Fig. 34.) qui passent par le centre & se terminent à l'ellipse de part & d'autre, sont nommées *Diametres*, parce qu'elles divisent la surface de l'ellipse en deux parties égales comme on verra par la suite.

I X.

127. Une ligne qui ne peut rencontrer l'ellipse qu'en un seul point est appellée *Tangente* en ce point, ainsi la ligne TH perpendiculaire à l'extrémité de l'axe en T , est tangente en ce point. Car on démontrera ci-après qu'elle ne la peut rencontrer qu'en ce seul point.

L E M M E.

128. En tout triangle rectangle comme FOP (Fig. 33.) le produit de la ligne PH , somme de l'hypoténuse FP & d'un des côtés FO , par MP différence des mêmes côtés, est égal au carré de l'autre côté PO , ou ce qui revient au même

$$(FP + FO) \times (FP - FO) = PO^2.$$

D É M O N S T R A T I O N.

Du point F , comme centre avec le rayon FO côté de l'angle droit FOP , soit décrit un demi cercle qui coupe l'hypoténuse en M & son prolongement en H . La ligne PQ sera tangente en O à cause de l'angle droit FOP , & l'on aura évidemment à cause du cercle $PH = FP + FO$ & $MP = FP - FO$. Mais (par la proposition 36 du 3^{eme} Livre d'Euclide), la tangente PO est moyenne proportionnelle entre la sécante entière PH & la partie extérieure MP , donc

$$(FP + FO) \times (FP - FO); \text{ ou } MP \times PH = PO^2.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

P R O P O S I T I O N I.

T H É O R È M E.

129. L'Ellipse étant formée (Fig. 34). comme on l'a expliqué ci-devant; je dis que le carré PO^2 d'une ordonnée PO au grand axe IT , est au rectangle de ses abscisses $IO \times OT$, comme le rectangle $IF \times FT$, des distances d'un des foyers aux extrémités de l'axe, est au carré de CT

moitié du grand axe IT , c'est-à-dire que l'on aura cette proportion $PO : IO \times OT :: IF \times FT : CT$.

DÉMONSTRATION.

Soit prolongé FP jusqu'en A , enforte que l'on ait $AF = IT$ ou $AP = PD$. Du point P , comme centre & avec le rayon PD , soit décrit un cercle qui coupera l'axe IT aux points D, G , si le point O n'est pas confondu avec le point D , comme on le suppose ici, & la ligne AF en un point B . Soit enfin divisée cette même ligne AF en deux également au point R . On aura par cette construction $RP = \frac{FB}{2}$ & $CO = \frac{FG}{2}$. Car à cause du diamètre AB on a $FB = AF - 2AP$, & à cause que le point R est le milieu de AF , on a $RP = \frac{AF}{2} - AP = \frac{FB}{2}$. De même $FG = 2CD - 2OD$ & $CO = CD - OD$ donc $CO = \frac{FG}{2}$. Cela posé par la propriété des sécantes extérieures au cercle, on a

$$FA : FD :: FG : FB \text{ donc } \frac{FA}{2} : \frac{FD}{2} :: \frac{FG}{2} : \frac{FB}{2}.$$

$$\text{Ou bien } CT : CD :: CO : RP.$$

$$\text{Et compo. } CT : CT + CD :: CO : CO + RP.$$

$$\text{Donc aligt. } CT : CO :: CT + CD : CO + RP.$$

Faisant encore *componendo*.

$$CT : CT + CO :: CT + CD : CT + CD + CO + RP.$$

D'où l'on tire $CT : IO :: ID : FP + FO$, en mettant IC à la place de CT dans le premier conséquent, & dans le second antécédent, & FR au lieu de CT dans le second conséquent; ainsi que, FC au lieu de CD , puis faisant les réductions nécessaires.

De même puisque l'on a $CT:CD::CO:RP$,
 Donc *dividendo* $CT:CT-CD::CO:CQ-RP$,
 Et *alternando* $CT:CO::CT-CD:CO-RP$,
 Et encore *dividendo*.

$CT:CT-CO::CT-CD:CT-CD-CO+RP$
 ce qui se réduit à $CT:OT::DT:FP-FO$,
 on mettant FR à la place de CT , & FC à
 la place de CD son égale, dans le quatrième
 terme de cette proportion. Mais nous venons
 de trouver ci-dessus $CT:IO::ID:FP+FO$
 & nous avons $CT:OT::DT:FP-FO$,
 Donc en multipliant ces deux proportions par
 ordre

$CT':IO \times OT::ID \times DT:(FP+FO) \times (FP-FO) =$
 PO' par le lemme précédent Ce qu'il fal. démon.

Si le point O se confond avec le point D , le
 cercle décrit du rayon PD touchera l'axe au mê-
 me point D , & les lignes FG , FO , FD seront
 égales, ce qui ne peut restreindre la démonstration,
 mais seulement la simplifier. On trouveroit en ce
 cas pour la dernière proportion, en suivant le même
 procédé que ci-dessus,

$$CT':ID \times DT::ID \times DT:(FP + 2CD) \times (FP - 2CD) = PD',$$

PROPOSITION II,

THÉORÈME,

130. Supposant toutes choses comme dans la
 proposition précédente : je dis que le rectangle
 $ID \times DT$ est égal au carré de CM , moitié du
 petit axe NCM . (Fig. 34.)

DÉMONSTRATION,

Puisque la proposition précédente est dé-

montrée généralement pour toutes les ordonnées à l'axe IT , en supposant que le demi axe CM soit une ordonnée au premier, on aura par la même proposition

$$CT^2 : IC \times CT :: ID \times DT : CM^2$$

mais $IC \times CT = CT^2$

Donc $ID \times DT = CM^2$. Ce qu'il falloit démontrer.

* On peut démontrer plus directement cette proposition, en menant des foyers à l'extrémité du petit axe les droites FM DM . Car puisque le point M est à l'ellipse, on a $FM + DM = IT$ par la génération de cette courbe ; mais à cause des triangles rectangles FCM DCM qui ont les côtés égaux FC CD & le côté CM commun, on a $FM = DM = CT$ & (par la trente deuxième d'Euclide) dans le triangle rectangle FCM on a FM^2 ou $CT^2 = CM^2 + CF^2$,

Donc

$$CM^2 = CT^2 - CF^2 = (CT + CF) \times (CT - CF)$$

ou enfin $ID \times DT$,

COROLLAIRE.

131. Puisque l'on a $CM^2 = ID \times DT$, on aura aussi $ID : CM :: CM : DT$, c'est-à-dire que le demi petit axe est moyen proportionnel entre les distances d'un des foyers aux extrémités du grand axe, d'où il suit que si l'on connoit le premier axe, avec la distance d'un des foyers à son origine, on pourra trou-

$PQ' : MQ \times QN :: CT' : CM' :: IT' : MN'$.
 Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

135. Si par un point p de l'ellipse, on mène une droite pq perpendiculaire au petit axe & qui lui sera par conséquent ordonnée, on démontrera comme dans cette proposition que
 $pq' : Mq \times qN :: IT' : MN'$.
 Mais on a aussi $PQ' : MQ \times QN :: IT' : MN'$.
 Donc $PQ' : MQ \times QN :: pq' : Mq \times qN$ c'est-à-dire que les quarrés des ordonnées au petit axe, sont entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes à ces ordonnées.

DÉFINITION.

136. Une ligne troisième proportionnelle aux deux axes, (Fig. 35.) est appelée *parametre* de celui qui occupe le premier terme de la proportion continue. Par exemple si l'on fait $IT : MN :: MN : TR$, cette ligne sera le *parametre* de l'axe IT & de même, si l'on fait $MN : IT :: IT : MS$. La ligne MS sera le *parametre* du second axe MN .

COROLLAIRE.

137. Il suit de cette définition que le rectangle d'un axe par son parametre, est égal au quarré du second. Car puisque $IT : MN :: MN : TR$. Donc $IT \times TR = MN^2$.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

138. Soit une ellipse MTN , dont IT MN

(Fig. 35.) sont les axes F, D , les foyers P, O , une ordonnée quelconque à l'axe IT , dont le parametre est supposé égal à la ligne TR élevée perpendiculairement à son origine, si l'on joint les points I, R par la droite IR & qu'ayant prolongé PO jusqu'à ce qu'elle la rencontre en G , on mène par ce point la droite GL parallèle à IT . Je dis que l'on aura $PO' = OT \times TL$, ou, ce qui est la même chose, que le quarré de l'ordonnée est égal au produit de son abscisse OT multipliée par le parametre diminué de la quantité RL , quatrième proportionnelle à l'axe, au parametre & à l'abscisse OT .

DÉMONSTRATION.

Par la troisième proposition (num. 32.)

$$PO' : IO \times OT :: MN' : IT'$$

donc $IO \times OT : PO' :: IT' : MN'$ & à cause du parametre TR , $IT' : MN' :: IT : TR$ & à cause des triangles semb. RTI, GOI ;
 $IT : TR :: IO : OG$

$$IO : OG :: IO \times OT : OG \times OT.$$

Donc $IO \times OT : PO' :: IO \times OT : OG \times OT$.

Mais $IO \times OT = IO \times OT$, donc aussi

$$PO' = OG \times OT.$$

Et à cause du parallélogramme $OGLT$, $OG = TL$, donc $PO' = OT \times TL$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

139. Il est évident à cause des triangles semblables RLG, RTI & des parallèles OT ,

GL , que $IT : TR :: OT : RL$. Donc $OT \times TR = IT \times RL$, ou, ce qui est la même chose le rectangle OR est égal au rectangle VL ; & ôtant de ces rectangles égaux le rectangle commun $GLRK$. On aura le rectangle GT égal au rectangle GV , mais on vient de démontrer que ce rectangle GT est égal au carré de l'ordonnée PO donc on aura aussi $PO^2 = VK \times GK$.

COROLLAIRE II.

140. Il suit évidemment de cette proposition que le carré d'une ordonnée PO est toujours moindre que le rectangle de son abscisse par le parametre, soit que l'on prenne l'abscisse OT , soit que l'on prenne IO , & la différence dans l'un & l'autre cas sera toujours un rectangle semblable à celui de l'axe par son parametre, & c'est de cette propriété que l'ellipse prend son nom, qui signifie proprement, *defectus*. Cette différence dans le premier cas est égal au rectangle GR & au rectangle IG , dans le second.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

141. Si par le foyer F , (fig. 35.) on mène une double ordonnée à l'axe EFe ; je dis que cette ligne sera égale au parametre de l'axe.

DEMONSTRATION.

Par la première & seconde proposition, on a

$EF^2 : IF \times FT :: CM^2 : CT^2$. Mais par la 3^{me} prop. $IF \times FT$ ou $ID \times DT = CM^2$ donc $EF^2 : CM^2 :: CM^2 : CT^2$ & tirant les racines

$$EF : CM :: CM : CT \text{ \& invert}$$

$$CT : CM :: CM : EF$$

doublant chaque terme de la proportion:

$$2CT : 2CM :: 2CM : 2EF$$

ou bien $IT : MN :: MN : Ee$, d'où il suit évidemment que cette ligne est égale au parametre de l'axe IT par sa définition (num. 136.) Ce qu'il falloit démontrer.

R E M A R Q U E.

142. Cette proposition n'est vraie dans l'ellipse que par rapport à l'axe, il n'y a que dans la parabole quelle est généralement vraie pour un diametre quelconque, comme l'on peut aisément s'en convaincre par algèbre, d'ailleurs il est aisé de reconnoître cette vérité si l'on fait attention que le parametre du second axe MN étant plus grand que le grand axe IT , il ne peut y avoir une double ordonnée à ce petit axe qui soit égale à son parametre.

PROPOSITION VII.

T H É O R È M E.

143. Tout diametre comme PCR (Fig. 36.) est coupé en deux parties égales PC, RC , par le centre C .

D É M O N S T R A T I O N.

Supposons d'abord que CP n'est pas

égale à CR . en ce cas elle ne peut être que plus petite ou plus grande que CR . Voyons où cette supposition nous conduira.

Puisque CP est plus grand que CR (*hyp.*) je puis prendre sur cette ligne une partie $Cp=CR$. de ce point p je mene aux foyers les droites pD pF : cela posé il est évident que les triangles CDp CFR seront égaux & semblables, puisqu'ils ont un angle égal C , compris entre côtés égaux, car $CD=CF$ (*num.* 114) & (*hyp.*) $Cp=CR$. de même les triangles CDR ; CFp seront égaux en tout puisqu'ils ont aussi l'angle C égal compris entre côtés égaux CD CF , Cp CR , d'où il suit que $pD=RF$ & que $pF=RD$. Mais puisque le point R est un des points de l'ellipse on a par la génération de cette courbe $RF+RD=IT$ donc aussi $pD+pF=IT$. donc $pD+pF=PD+PF$. ce qui est absurde, car la somme des lignes pD pF , est évidemment plus petite que celle des lignes PD PF . On ne peut donc pas supposer sans absurdité que CP soit plus grande que CR ; on démontrera de la même manière que l'on ne peut pas supposer cette ligne plus petite que CR sans un pareil inconvénient; reste donc qu'elle lui soit égale, puisqu'elle ne peut être ni plus petite ni plus grande sans absurdité. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

144* Il suit de cette proposition que le grand

grand axe IT est le plus grand de tous les diamètres. Car à cause des triangles DCP , FCR égaux & semblables comme on l'a démontré dans cette proposition, $PD=FR$ mais $FP+PD=IT$ donc aussi $FP+FR=IT$ mais $FP+FR > PR$ donc $IT > PR$. Ce qui se démontrera de même pour tout autre diamètre.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

145. Supposant toutes choses comme dans la proposition précédente, & l'ordonnée PO à l'axe IT , (Fig. 36.) je dis que le petit axe MN est le plus petit diamètre possible.

DÉMONSTRATION.

A cause du triangle rectangle COP , on a (par la 32 d'Euclide) $CP^2 = CO^2 + PO^2$.

Mais (num. 129.) on a

$CT^2 : IO \times OT :: ID \times DT : PO^2$ & par le lemme fonda.

$$IO \times OT = CT^2 - CO^2 \text{ \& } ID \times DT = CT^2 - CD^2.$$

Donc $CT^2 : CT^2 - CO^2 :: CT^2 - CD^2 : PO^2$.

Donc $PO^2 = \left(\frac{CT^2 - CO^2}{CT^2} \right) \times (CT^2 - CD^2)$ & en faisant les multiplications indiquées, il vient

$$PO^2 = \frac{CT^2 \times CT^2 - CO^2 \times CT^2 - CT^2 \times CD^2 + CO^2 \times CD^2}{CT^2}.$$

Donc

$$CP^2 = \frac{CT^2 \times CT^2 - CO^2 \times CT^2 - CT^2 \times CD^2 + CO^2 \times CD^2 + CO^2 \times CT^2}{CT^2}$$

en substituant l'expression de PO^2 dans l'égalité $CP^2 = CO^2 + PO^2$, & réduisant CO^2 au même dénominateur. D'où l'on tire en faisant les réductions nécessaires & divisant par CT^2

autant qu'il est possible

$$CP^2 = CT^2 - CD^2 + \frac{CO^2 \times CD^2}{CT^2}$$

Mais (num. 130.) $CT^2 - CD^2$ ou $ID \times DT = CM^2$

Donc $CP^2 = CM^2 + \frac{CO^2 \times CD^2}{CT^2}$ d'où il suit évidemment qu'un demi-diametre CP sera toujours plus grand que le demi-petit axe CM tant que l'abscisse CO sera de quelque valeur & partant le second axe MN est le plus petit de tous les diametres. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

146. Donc les deux axes sont les limites de l'augmentation & de la diminution des diametres, puisque le premier est le plus grand de tous, par le corollaire de la 7^{me} & que le second est le plus petit de tous par la présente.

COROLLAIRE II.

146. Donc si l'on décrit un cercle du point C comme centre avec le rayon CM , ce cercle sera inscrit à l'ellipse & la touchera aux seuls points MN , puisque tous les diametres CP différents de CM seront plus grands : & que partant les points P seront hors du cercle. *

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

148. Si par le point I (Fig. 36.) origine de l'axe on élève une perpendiculaire IS ; je dis qu'elle ne rencontre l'ellipse qu'au seul point I , ou, ce qui

est la même chose qu'elle est tangente en ce point.

DÉMONSTRATION.

Si la ligne droite IS n'est pas tangente à l'ellipse au point I , elle la rencontrera encore en quelqu'autre point S . De ce point aux foyers F & D soient menées les lignes FS & DS , puisque ce point est supposé appartenir à l'ellipse, on aura par la génération de cette courbe $FS + DS = IT$. Mais DS étant l'hypothénuse d'un triangle rectangle IDS , est plus grande que la ligne ID & pareillement FS est plus grande que IF ou DT , par la même raison. Donc $FS + DS > ID + DT = IT$. D'où il suit évidemment que le point S ne peut appartenir à l'ellipse. On démontrera la même chose de tout autre point ; donc la ligne IS perpendiculaire à l'extrémité de l'axe IT est tangente à la courbe en ce seul point. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

149. Si par un point P (Fig. 37.) de l'ellipse on mène aux foyers F & D , les droites FP & DP , & qu'ayant pris sur le prolongement de FP la ligne $AP = PD$, par le point A ainsi déterminé ; on mène la droite AD , & qu'enfin par le milieu E de cette ligne, & le point P , on tire la droite PE , je dis que cette ligne sera tangente au seul point P .

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer que la droite PE est tan-

gente au seul point P , il suffira de faire voir que tout point comme p différent du point P , ne peut être à l'ellipse. De ce point p pris à discrétion sur la ligne PE soient menées aux points $A D F$, les droites pA , pD , pF . Puisque l'on a (*par construction*), $AP = PD$ & $DE = AE$, la droite PE est perpendiculaire sur le milieu de AD , & passe par tous les points également éloignés des extrémités $A D$ de la ligne AD , donc $pA = pD$: mais $pA + pF > FA$. Donc aussi $pF + pD > FA$ qui est égale à IT *par construction*. Donc le point p ne peut être à l'ellipse. Donc la droite PE est tangente au seul point P , comme on l'a proposé.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

150. Par un point P donné sur une ellipse $IP T$ l'on ne peut mener qu'une tangente PE . (Fig. 38.)

DÉMONSTRATION.

Supposons d'abord que du point P dans l'angle DPE , on puisse mener une tangente Ph différente de la tangente PE . Du foyer D j'abaisse sur cette ligne la perpendiculaire Dga , du point F comme centre avec le rayon AF ou IT , je décris un arc de cercle qui coupe la droite Dga au point a , je mene la droite Fa qui rencontre l'ellipse au point p , & la droite AP du point a au point P . Enfin par le milieu

e de la droite aD & le point p , je tire la droite ep qui sera évidemment tangente au point p , par la proposition précédente. Cette construction supposée & bien conçue, il est aisé de démontrer que la ligne Ph ne peut être tangente au point P . Car puisque la ligne pe est tangente en p , elle est perpendiculaire à Da , donc Pgh lui est parallèle, puisque cette ligne est *par construction*, perpendiculaire à la même Da . Donc elle sera partout également éloignée de cette tangente de la distance eg . Reste à démontrer que cette distance est toute entière du côté de l'axe IT , ou, ce qui est la même chose, entre la tangente pe & le même axe. A cause du triangle FPa , on a $FP + Pa > Fa$. Mais $Fa = FA$ donc $FP + Pa > FA$ & étant de chaque membre la quantité commune FP ; on aura $Pa > PA$; donc $Pa > PD$ puisque $PA = PD$, c'est-à-dire que le triangle DPa n'est pas isocèle, donc la perpendiculaire abaissée de l'angle P sur la base aD , la divise en deux segments inégaux, & le plus grand segment ag répond au plus grand côté aP & le plus petit Dg répond au plus petit côté PD . Donc la distance eg se trouve du côté de l'ellipse par rapport à la tangente pe , & partant la droite Ph n'est pas tangente en P comme on l'avoit supposé, puisqu'elle coupe l'ellipse. Donc par le point P l'on ne peut mener qu'une seule tangente PE . Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

On a cru devoir tourner cette démonstration ainsi que toutes les autres sur les tangentes un peu différemment de ce qu'elles sont dans M. de la Hire, afin de leur donner la dernière certitude, & de ne rien laisser à désirer sur cet article.

On va voir dans les deux problèmes suivants, l'usage que l'on fait de ces propositions pour mener des tangentes à l'ellipse, lorsque l'on en connoît l'axe & les foyers.

PROPOSITION XII.

PROBLÈME.

* 151. Une ellipse $IP T$, son axe IT , les foyers $F D$, & un point P sur cette courbe étant donnés, mener une tangente à ce point. (Fig. 37.)

SOLUTION.

Du point P donné, je mene aux foyers $F D$ les droites $P F P D$: sur le prolongement de la ligne AP , je prens une partie $AP = P D$. Ayant joint les points $A D$, par la ligne AD , par le point E milieu de cette ligne & le point P donné, je mene la ligne $P E$ qui sera tangente en P puisqu'il n'y a sur cette ligne que le seul point P qui puisse appartenir à l'ellipse comme il est suffisamment démontré par les propositions précédentes.

PROPOSITION XIII.

PROBLÈME II.

152. Une ellipse $IP T$ son axe IT les foyers

FD, & un point **G** (Fig. 37.) sur le même plan que la courbe étant donné, mener une tangente qui passe par ce point.

SOLUTION.

Du foyer **D** au point **G** soit menée la ligne **GD**. Du point **G** comme centre avec cette même ligne **GD** comme rayon, soit décrit un arc de cercle vers **A**. Ensuite du point **F** comme centre avec le rayon **IT** soit décrit un autre arc de cercle qui coupe le premier au point fixe **A**. Soient de plus joints les points **A** & **D** par la ligne **AD** : enfin par le point **E** milieu de cette ligne & le point **G** donné, soit tirée la ligne droite **GPE** qui sera tangente au point **P** ; où la ligne **AF** coupe l'ellipse.

DÉMONSTRATION.

A cause du cercle dont le point **G** est le centre, on a $GA = GD$, de plus on a divisé la droite **AD** en deux également en **E**, donc la ligne **GPE** est perpendiculaire sur le milieu de **AD**. Donc elle passe par tous les points également éloignés de ses extrémités **A**, **D**, donc elle passe aussi par le point **P** où la ligne **AF** coupe l'ellipse ; puisque ce point est tel que l'on a $PA = PD$. Enfin il est évident que tout autre point comme **p** différent du point **P** n'est point à l'ellipse, car ayant mené les droites **pA**, **pD**, **pF** aux points **A**, **D**, **F**, à cause du triangle **FpA**, on a $Fp + pA > FA$. Donc aussi $Fp + pD > FA$

Fig

qui est égal à IT . D'où il suit que la ligne GE est tangente au seul point P , d'ailleurs elle passe par le point donné G , par construction, donc elle remplit toutes les conditions du problème.

R E M A R Q U E.

On voit aisément qu'en suivant la même construction, de l'autre côté du point G , on trouvera une autre tangente GRh , dont on déterminera le point de contingence R , comme on a fait le point P , & tant que le point G ne sera pas sur l'ellipse, on trouvera toujours deux tangentes qui passeront par ce point. Si le point G étoit au-dedans de l'ellipse, le cercle décrit du rayon GD ne pourroit couper le cercle décrit du rayon IT . Ce qui doit arriver nécessairement, puisque dans ce cas la ligne qui passeroit par ce point, ne peut être tangente. En un mot cette solution est générale & l'on pourra toujours par son moyen avec la connoissance des foyers résoudre tous les problèmes où il ne s'agira que de mener des tangentes à l'ellipse. *

P R O P O S I T I O N X I V.

T H É O R È M E.

253. Supposant les mêmes choses que dans les propositions précédentes; je dis que les angles FPP DPE (Fig. 37.) formés du même côté de la tangente avec cette même tangente, par les lignes FP DP menées du point de contingence P aux foyers D F , sont égaux entr'eux.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'angle DPA du triangle isocèle DPA est coupé en deux également par la ligne PE menée du point P perpendiculairement à la base AD , on aura l'angle DPE , égal à l'angle APE , mais $APE = FPP$ qui lui est opposé au sommet, donc $DPE = FPP$.
Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

154. Si l'on ajoute à ces angles égaux FPP DPE , l'angle commun FPD , on aura évidemment l'angle FPE égal à l'angle DPF .

COROLLAIRE II.

155. * Il suit de cette proposition que si à l'un des foyers comme F , on place un point lumineux dont les rayons puissent s'étendre de toutes parts à la circonférence de l'ellipse, que l'on suppose capable de réfléchir les rayons, ils y seront effectivement réfléchis de manière que la ligne de réflexion passera par l'autre foyer D ; & réciproquement les rayons partis du foyer D étant réfléchis à la rencontre de l'ellipse passeront par l'autre foyer F . Car on peut toujours imaginer qu'un rayon quelconque, FD , par exemple, va choquer l'ellipse au point P , comme il choqueroit le plan représenté par la tangente PE en ce point, & partant il doit se réfléchir au foyer D suivant les loix des corps à ressort.

PROPOSITION XV.

THÉOREME.

* 156. Supposant toujours la même chose que dans la proposition précédente, si l'on divise l'angle DPF en deux également par la ligne PR , je dis que cette ligne sera perpendiculaire à la tangente en P , & que l'on aura $FR:RD::FP:PD$. (Fig. 39)

DÉMONSTRATION.

1° Puisque l'angle DPF a été divisé en deux également par la ligne PR , on a l'angle $DPR = RPF$. Mais $RPF = NPA$ qui lui est opposé au sommet. Donc $DPR = NPA$ & ajoutant à ces angles égaux les angles APE , DPE qui sont égaux à cause du triangle isocèle DPA , on aura l'égalité.
 $EPA + NPA$ ou $EPN = DPE + DPR$ ou EPR , d'où il suit que la ligne PR est perpendiculaire à la tangente PE , puisque cette tangente fait avec elle deux angles égaux de suite NPE , EPR . Ce qu'il falloit 1° démontrer.

2° Puisque la ligne PR & la ligne ED sont chacune perpendiculaires à la tangente EP , elles sont parallèles entr'elles, donc les triangles FPR , FAD sont semblables. Donc $FR:RD::FP:PA = PD$. Ce qu'il falloit 2° démontrer.

COROLLAIRE I.

157. Puisque l'on a $FR:RD::FP:PD$.
 Donc componendo $FR+RD:FR::FP+PD:FP$.

ou en réduisant $FD:FR::IT:FP$. On voit par là comment il faudroit s'y prendre pour mener une perpendiculaire à l'ellipse d'un point R donné sur l'axe. Il n'y auroit qu'à faire cette proportion $FD:FR::IT:FP$; du point F comme centre, avec un rayon égal à cette quatrième proportionnelle FP , décrire une partie de cercle qui coupe l'ellipse en P , & l'on auroit le point demandé, où la ligne RP sera perpendiculaire à la tangente PE , & par conséquent à la courbe.

Car puisqu'on a fait $FD:FR::IT:FP$. Donc *dividendo* $FD-FR:FR::IT-FP:FP$; & réduisant $RD:FR::PD:FP$. Donc l'angle FPD est divisé en deux également puisque les segments de la base du triangle FPD sont proportionels aux côtés FD & DP .

COROLLAIRE II.

158. Donc les perpendiculaires à l'ellipse seront toutes renfermées dans la partie FD de l'axe, puisque si près que l'on puisse imaginer le point P du point T , la ligne PR perpendiculaire à la tangente sera toujours comprise dans l'angle FPD qu'elle divise en deux également. D'où il suit que d'un point G pris sur l'axe entre D & T , aucune ligne différente de cet axe ne peut être perpendiculaire à la courbe.

R E M A R Q U E.

Si le point R étoit placé sur l'axe, de manière que le cercle décrit du centre F avec la ligne FP quatrième proportionnelle aux droites FD & FR IT ;

ne pût pas couper l'ellipse en quelque points P , on concludroit que le problème seroit impossible. On verra dans la suite la limite précise des points R qui donnent la solution complète du problème.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

159. Si par un point P de l'ellipse on mène une droite PQ , (Fig. 39.) parallèle à l'axe, sur laquelle on prenne une partie $PQ = PF$; & que du point Q ainsi déterminé, & du point F on mène à la droite PR prolongée autant qu'il sera nécessaire, les droites perpendiculaires NQ FM , je dis que l'on aura $NQ : FM :: IT : FD$, ou, ce qui est la même chose, que ces perpendiculaires seront toujours entre elles, dans le rapport constant de l'axe à la distance des foyers,

DÉMONSTRATION.

Les triangles rectangles PQN , RPO sont évidemment semblables, car à cause des parallèles $PQFD$ qui sont coupées par la droite MN , on a l'angle $QPN = QRP$. Donc on aura

$QN : PQ :: PO : RP$, & à cause des triangles rectangles semblables RPO , RFM ,
 $PO : RP :: FM : RF$.

Donc $QN : PQ :: FM : RF$, alternant & mettant FP à la place de PQ son égale, on a $QN : FM :: FP : FR$ & à cause des triangles semblables FPR , FAD , $FP : FR :: FA : FD$.
 Donc $QN : FM :: FA$ ou $IT : FD$, Ce qu'il falloit démontrer.

R E M A R Q U E.

160. On sçait par expérience qu'un rayon de lumière (Fig. 40.) venant à tomber obliquement d'un milieu plus rare dans un milieu plus dense qu'il peut pénétrer, comme de l'air sur la surface polie d'un morceau de glace, au lieu de suivre sa première direction Pr en le traversant, s'en écarte pour suivre une ligne droite PF dans le même plan que la droite PQ , qui s'approche de la droite MN élevée perpendiculairement au point P où il a rencontré le milieu.

On sçait de plus encore par expérience que la droite QN sinus de l'angle d'incidence QPN , est toujours dans un rapport constant avec la droite FM sinus de l'angle de réfraction FPM pour même milieu en supposant le sinus total $PQ = PF$.

Si donc on décrit une ellipse telle, que les droites $ITFD$, ayant entr'elles le même rapport constant, qu'ont entr'eux les sinus des angles d'incidence & de réfraction, ce qu'on aura reconnu par expérience. Si du foyer F , comme centre avec un rayon quelconque FO , on décrit un arc de cercle qui coupe la courbe dans un point S , pour former ensuite un solide de verre ou de glace, égal & semblable à celui qui résulteroit de la révolution de la figure $OgSPT$ autour de l'axe IT ; on aura un corps dont voici la propriété.

Tout rayon comme PQ qui venant parallèlement à l'axe IT rencontrera la surface con-

vexe de ce corps, au lieu de suivre la première direction Pr s'en écartera pour s'approcher de la droite PR , de manière que sa nouvelle direction passera par le foyer F . Car le rayon rencontre la surface convexe de ce corps de la même manière qu'il rencontreroit un plan représenté par la tangente PE . L'angle NPQ est donc l'angle d'incidence, & l'angle $FP M$ est celui de réfraction, puisque les droites $NQ FM$, qui en sont les sinus, à cause de $PQ = PF$, sont entr'elles comme IT à FD que l'on a fait (*par construc.*) égal au rapport des sinus des angles d'incidence & de réfraction d'un rayon qui passe de l'air dans le verre. Enfin à cause du cercle OgS , le rayon PgF est perpendiculaire à la surface convexe de la partie sphérique décrite par l'arc OS , puisque le rayon tend au centre F de la même sphère, donc il sortira du verre sans souffrir aucune réfraction, parce qu'un corps qui pénètre un milieu par une ligne perpendiculaire à sa surface, ne peut s'éloigner de cette même perpendiculaire. Donc le rayon SP ayant une fois pris la direction PF ne pourra s'en écarter, & partant arrivera au point F . On démontrera la même chose de tout autre rayon différent de PQ , pourvu qu'il vienne suivant une ligne parallèle à l'axe. Si l'on veut avoir un plus grand détail des propriétés de ce corps par rapport à la dioptrique, on peut voir l'usage que M. Descartes fait de cette propriété dans son Livre de Dioptrique, & l'excellent

PROPOSITION XVII.

THÉOREME.

161 Supposant toutes choses comme dans la 14^{ème} proposition (fig. 41). Si l'on prolonge la tangente PE, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe IT de l'ellipse en un point H, je dis que l'on aura cette proportion continue $CO:CT::CT:CH$, c'est-à-dire que toute ligne comprise entre le centre de l'ellipse & la rencontre de l'axe par une tangente PH est troisième proportionnelle à l'abscisse correspondante à l'ordonnée PO, & au demi axe.

DÉMONSTRATION.

Par le foyer F, le centre C & le point H où la tangente PH rencontre l'axe IT, soient menées les droites FL, CR, HK parallèles à la ligne AD. Il est visible que la droite FA sera divisée en deux également au point R, puisque la ligne FD l'est en C. Cela posé, les triangles semblables FPL APE, FLH DEH, FKH FAD, nous donnent $FP:AP::FL:AE=DE$.

$$FL:DE::FH:DH.$$

$$FH:DH::FK:AK.$$

Donc $FP:AP::FK:AK$. Et dividendo

$$FP-AP:AP::FK-AK:AK.$$

Mais à cause du cercle ADG $AP=PB$, donc $FP-AP=FP-PB=FB=2RP$, comme il a été démontré au commencement de la 1^{ère} proposition (num. 129). De même $FK-AK=AF=IT$. Donc en substituant

ces valeurs dans la dernière proportion on aura
 $2RP:AP::IT:AK$, & prenant la moitié
 des antécédents $RP:AP::CT:AK$ & *comp-*
nendo $RP:RP+AP::CT:CT+AK$.

Mais $RP+AP=RA=CT$

& $CT+AK=AR+AK=KR$

puisque $CT=AR$. Donc $RP:CT::CT:KR$;

Donc $CT^2=RP \times KR$.

Présentement à cause du cercle AGD &
 des sécantes intérieures $FAFD$, on a, com-
 me dans la 1^{re} prop. $FD:FA::FB:FG$.
 Mais $CD=\frac{FD}{2}$, $AR=\frac{FA}{2}$, & l'on démon-
 trera comme au *numero 126* que $RP=\frac{FB}{2}$ &
 que $CO=\frac{FG}{2}$; donc $CD:AR::RP:CO$,
 & à cause des parallèles $CRKH$,

$CD:AR::CH:KR$.

Donc puisque les deux 1^{res} raisons sont égales.

$RP:CO::CH:KR$. Donc $CO \times CH = RP \times KR$.

& nous venons de trouver ci-dessus

$CT^2 = RP \times KR$.

Donc $CT^2 = CO \times CH$, d'où l'on tire tout
 de suite $CO:CT::CT:CH$; *Ce qu'il falloit*
démontrer.

COROLLAIRE I.

162. Il suit de cette proposition que l'on
 aura aussi $IO:OT::IH:HT$; car puisque
 $CO:CT::CT:CH$; on aura *componendo*
 $CO:CO+CT::CT:CT+CH$, & *dividendo*

$CO:CT-CO::CT:CH-CT$.

Donc puisque les deux proportions ont les
 mêmes antécédents, les conséquents seront
 aussi.

aussi en proportion & donneront

$$CT + CO : CT - CO :: CH + CT : CH - CT.$$

Où réduisant & alternant $IO : IH :: OT : HT.$

Ce qui montre que la ligne IH est coupée en proportion harmonique aux points O T .

* Il y a proportion harmonique entre trois grandeurs, lorsque la plus petite est à la plus grande; comme l'excès de la moyenne sur la plus petite, est à l'excès de la plus grande sur la moyenne : par exemple, ces trois nombres, 3 4 6, sont en proportion harmonique, car on a $3 : 6 :: 4 - 3 : 6 - 4$; $1 : 2$. Selon cette définition, il est aisé de voir que les trois grandeurs IO IT IH sont en proportion harmonique, puisque l'on a par le présent corollaire $IO : IH :: OT : HT$. Mais $OT = IT - IO$, & $HT = IH - IT$. Donc on aura $IO : IH :: IT - IO : IH - IT$, ce qui suffit pour en conclure que ces trois lignes sont en proportion harmonique.

COROLLAIRE II.

163. Puisque l'on a $CO : CT :: CT : CH$, on aura $CH = \frac{CT^2}{CO}$; donc OH ou $CH - CO$, $= \frac{CT^2}{CO} - CO = \frac{CT^2 - CO^2}{CO}$, en réduisant CO à la même dénomination. D'où l'on tire $CO : CO + CT :: CT - CO : OH$. Puisque $CT^2 - CO^2 = (CT + CO) \times (CT - CO)$.

DÉFINITION.

164. La ligne CH comprise entre le centre C , & la rencontre de l'axe IT , par une tangente PH est appelée sou-tangente, & l'on se sert des propriétés de cette ligne, pour mener

une tangente à l'ellipse par un point donné, soit qu'il se trouve sur la courbe, soit qu'on le donne sur le prolongement de l'axe, comme on le va voir dans les deux problèmes suivants, que l'on ne met ici, que pour montrer l'usage de cette proposition.

PROPOSITION XVIII.

PROBLÈME III.

165. Un point P étant donné sur l'ellipse (Fig. 42), mener une tangente PH à ce point.

SOLUTION.

Du point P donné, soit abaissée l'ordonnée PO à l'axe IT : puis faites cette proportion $CO:CT::CT:CH$. Par le point P & le point H ainsi déterminé, menez la droite PH qui sera tangente en P ; comme il est évident par la proposition précédente.

PROPOSITION XIX.

PROBLÈME IV.

166. Un point H étant donné sur le prolongement de l'axe IT , mener par ce point une droite HP qui aille toucher l'ellipse dans un point P .

SOLUTION.

Faites la proportion continue $CH:CT::CT:CO$, au point O ainsi déterminé élevez l'ordonnée PO à l'axe IT , & enfin joignez le point P de l'ellipse & le point donné H , par la ligne PH , qui sera la tangente demandée,

comme il est suffisamment démontré par la dix-septième.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

167. Supposant encore toutes choses comme dans les propositions précédentes (Fig. 42), si l'on mène du point P l'ordonnée PQ au petit axe MN, & si l'on prolonge la tangente PH jusqu'à ce qu'elle rencontre le même petit axe en K, je dis que l'on aura la proportion continue :

$$CQ : CM :: CM : CK.$$

DÉMONSTRATION.

A cause du parallélogramme CQPO, on a $CO = PQ$; & comme la ligne MN est coupée en deux parties égales en G, & en deux parties inégales en Q on aura, par le lemme fondamental, $MQ \times QN = CM^2 - CQ^2$. Cela posé puisque, par la 17^{ème} proposition, $CO : CT :: CT : CH$ on aura $CO : CH :: CQ : CT$ & par la 4^{ème} PQ^2 ou $CO^2 : CT^2 :: CM^2 - CQ^2 : CM^2$ donc $CO : CH :: CM^2 - CQ^2 : CM^2$, & à cause des triangles semblables CKH QKP ; PQ ou $CO : CH :: QK : CK$.

Donc $QK : CK :: CM^2 - CQ^2 : CM^2$.
Donc desirando

$CK - QK : CK :: CM^2 - CM^2 + CQ^2 : CM^2$.
Et réduisant $CQ : CK :: CQ^2 : CM^2$.

Donc $CQ \times CM^2 = CK \times CQ^2$, & divisant chaque membre par CQ , $CM^2 = CK \times CQ$, d'où l'on tire $CQ : CM :: CM : CK$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

168. Puisque $CQ : CM :: CM : CK$. Donc on aura *compon.* $CQ : CQ + CM :: CM : CM + CK$, & *dividendo.* $CQ : CM - CQ :: CM : CK - CM$. Donc puisque les antécédents de ces proportions sont les mêmes, les conséquents seront aussi en proportion, ce qui donne $CQ + CM : CM - CQ :: CK + CM : CK - CM$. Et réduisant $NQ : MQ :: NK : KM$. Et alternant $NQ : NK :: MQ : KM$. D'où il suit que la ligne NK est divisée aussi en proportion harmonique aux points $Q M$, puisque la plus petite ligne NQ , est à la plus grande NK , comme l'excès MQ de la moyenne sur la plus petite, est à l'excès KM de la plus grande sur la moyenne.

Cette proposition sert aux mêmes usages que la dix-septième.

DÉFINITION.

* 169. Si d'un point P de l'ellipse (Fig. 42), on mene une ordonnée PO à l'axe IT : & par le même point, une perpendiculaire PR à la tangente PH , terminée à l'axe en R , la partie OR du même axe comprise entre l'ordonnée PO & le point R , est appelée *sou-perpendiculaire* ou *sou-normale*.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

170. Supposant les mêmes choses (Fig. 42).

que dans la définition précédente, je dis que l'abscisse CO & la sou-normale OR , sont toujours entr'elles dans un rapport constant qui est celui de CT^2 à CM^2 , ou, ce qui revient au même, que l'on aura toujours cette proportion pour une abscisse quelconque CO & la sou-normale correspondante OR ;

$$CO:OR::CT^2:CM^2$$

DÉMONSTRATION.

Puisque le triangle rectangle RPH , est divisé par l'ordonnée PQ perpendiculaire à l'axe, en deux triangles rectangles ROP & POH semblables au premier, on a $OR:PO::PO:OH$. Donc $PO^2 = OR \times OH$. Par la troisième proposition (numero 132), On a cette analogie: $CT^2:CM^2::CT^2-CO^2$ ou $IO \times OT:PO^2$. Donc $PO^2 = (CT^2 - CO^2) \times \frac{CM^2}{CT^2}$ & (numero 163) $OH = \frac{CT^2 - CO^2}{CO}$; Donc en substituant ces valeurs dans l'égalité précédente, on aura $(CT^2 - CO^2) \times -\frac{CM^2}{CT^2} = OR \times (\frac{CT^2 - CO^2}{CO}) = \frac{OR}{CO} \times (CT^2 - CO^2)$. Ou en divisant chaque membre par $CT^2 - CO^2$ $\frac{CM^2}{CT^2} = \frac{OR}{CO}$; Donc $CO \times CM^2 = OR \times CT^2$. D'où l'on tire $CO:OR::CT^2:CM^2$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

171. Plus l'abscisse CO sera petite, plus aussi la sou-normale OR sera petite, & réciproquement, plus l'abscisse CO sera grande, plus la même sou-normale sera grande; car pour que ces grandeurs conservent toujours

entr'elles le rapport constant de CT^2 à CM^2 ;
Il faut que l'une augmente ou diminue en
même temps que l'autre.

COROLLAIRE II.

172. Si le point P s'approche continuellement du point T , l'ordonnée PO deviendra infiniment petite, l'abscisse CO pourra être considérée, comme égale à CT , & la sou-normale QR deviendra dans ce cas TR ; ce qui n'empêche pas la proportion de subsister. Elle devient alors $CT : TR :: CT^2 : CM^2$, donc $CT \times CM^2 = CT^2 \times TR$, & divisant chaque membre par CT , $CM^2 = CT \times TR$, d'où l'on tire $CT : CM :: CM : TR$. Ce qui montre que la sou-normale est égale à la moitié du paramètre de l'axe, selon la définition de ce même paramètre (No 136), lorsque l'abscisse CO est égale à la moitié du grand axe. Et de plus, que le même demi paramètre, est la plus grande sou-normale possible, puisqu'elle répond à la plus grande abscisse que l'on puisse trouver sur l'axe à partir du centre.

COROLLAIRE III.

173. Il suit encore de cette proposition, qu'ayant pris du point T vers le centre C sur l'axe IT , une partie TS égale à la moitié du paramètre ; les points $C S$ seront les limites de toutes les perpendiculaires que l'on pourra mener aux différents points du quart de l'ellipse MPT , en sorte qu'aucune perpendiculai-

re à l'ellipse ne pourra tomber entre les points S & T . Quoique cette proposition se déduise immédiatement de la présente, cependant comme elle pourroit n'être pas saisie avec la même facilité de tout le monde ; nous allons la démontrer directement. Toute cette démonstration se réduit à faire voir que la somme TR d'une abscisse quelconque OT , si petite qu'elle soit, & de la sou-normale correspondante OR sera toujours plus grande que la moitié du parametre.

Démonstration du Corollaire.

Puisque $CO : OR :: CT^2 : CM^2$ donc $OR = \frac{CM^2 \times CO}{CT^2}$ mais $OT = CT - CO$. Donc $OT + OR$ ou $TR = CT - CO + \frac{CM^2 \times CO}{CT^2}$ & réduisant $CT - CO$ au même dénominateur CT^2 ; On aura $TR = \frac{CT^2 \times CT - CT^2 \times CO + CM^2 \times CO}{CT^2}$

Il est aisé de voir que cette expression est plus grande que la moitié du parametre de l'axe ; pour s'en convaincre, il n'y a qu'à supposer pour un instant qu'elle lui soit égale ; on aura $\frac{CT^2 \times CT - CT^2 \times CO + CM^2 \times CO}{CT^2} = \frac{CM^2}{CT}$ puisque le demi-parametre est troisième proportionnelle aux deux demi-axes ; multipliant chaque membre par CT^2 , on aura

$CT^2 \times CT - CT^2 \times CO + CO \times CM^2 = CM^2 \times CT$
ôtant de chaque membre $CM^2 \times CO$ il viendra
 $CT^2 \times CT - CT^2 \times CO = CM^2 \times CT - CM^2 \times CO$
ou $CT^2 \times (CT - CO) = CM^2 \times (CT - CO)$.
Et divisant chaque membre par $CT - CO$,
 $CT^2 = CM^2$; quoique ce résultat soit faux,

il se trouve en R , entre le centre C & l'ordonnée PO . On déduira de cette proposition précisément les mêmes corollaires que de la précédente ; c'est pourquoi il seroit inutile de les répéter ici. *

PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

278. Si par un point P de l'ellipse (Fig. 43.), on mène une tangente PH jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe IT en H , & par le point T origine du même axe, la droite BT perpendiculaire au même axe & tangente en ce point, jusqu'à ce qu'elle rencontre le diamètre CP aussi prolongé jusques en B , je dis que le triangle PAB , formé par les tangentes BT PH & le diamètre CPB est égal au triangle TAH , formé par les mêmes tangentes avec le prolongement TH de l'axe IT .

DÉMONSTRATION.

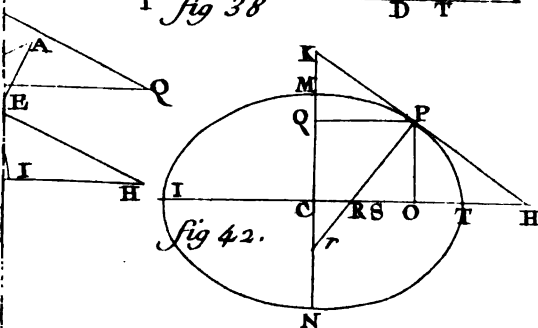
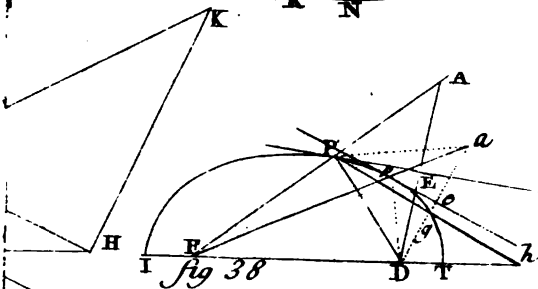
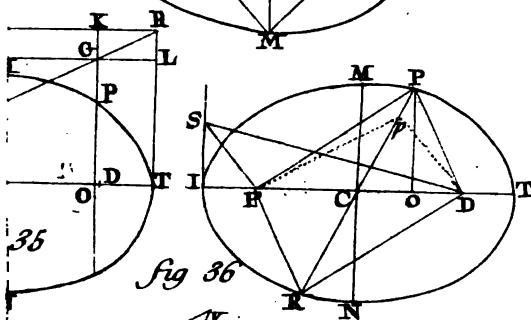
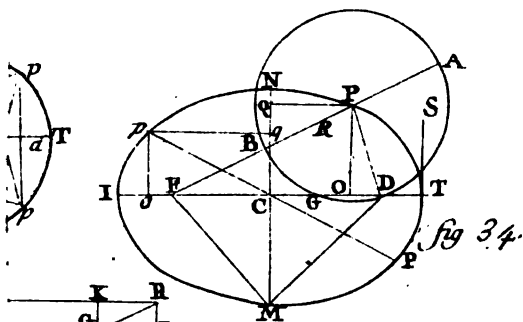
Par le point T origine de l'axe soit menée la droite TD parallèle à la tangente PH , du point P , soit menée la droite PO perpendiculaire & ordonnée à l'axe IT , & par conséquent parallèle à BT , à cause des parallèles TD , PH . Les triangles CDT , CPH seront semblables, & donneront

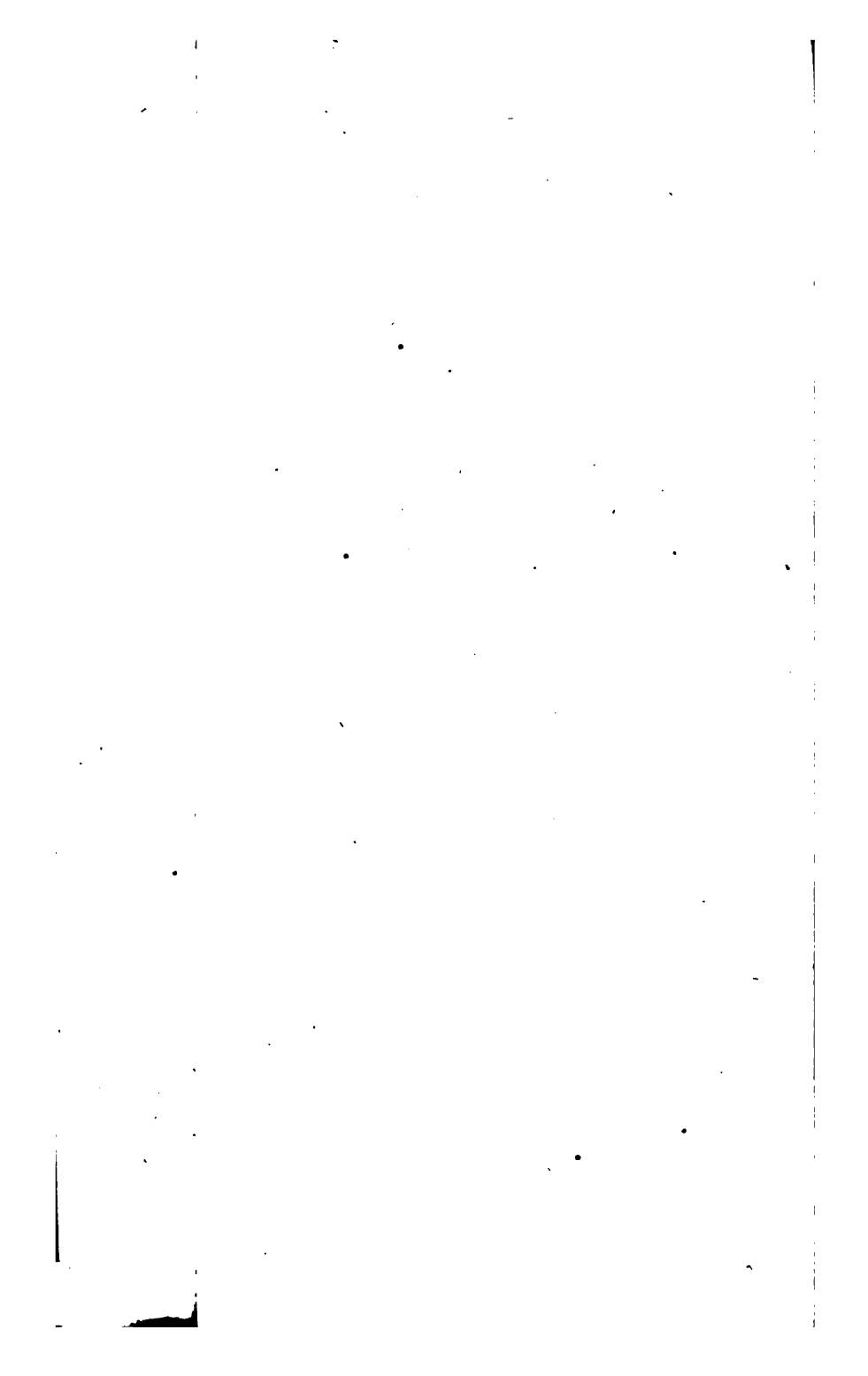
$CD:CP::CT:CH$ & par la 17^{eme} propos.

$CT:CH::CO:CT$, & à cause des triangles semblables CTB COP ,

$CO:CT::CP:CB$.

D'où l'on déduira les trois proportions suivantes.





$CB:CP::CP:CB$; $CD:CP::CO:CT$, & $CP:CB::CT:CH$,
 qui nous montrent que les lignes DO PT BH
 sont parallèles entr'elles , puisque les lignes
 CB CH sont coupées par les mêmes droites
 en parties proportionnelles. Donc les triangles
 PTB PTH , qui ont même base PT & sont
 compris entre les parallèles PT DH , sont
 égaux entr'eux ; & ôtant encore de ces trian-
 gles égaux , le triangle PAT qui leur est
 commun , il restera d'une part , le triangle
 PAB égal au triangle PAH de l'autre. Ce
 qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE. I.

179. Il suit de cette proposition 1^o que
 les triangles PDT POT , compris entre les
 parallèles PT DO , & appuyés sur la base
 commune PT sont égaux entr'eux. Donc en
 leur ajoutant les triangles égaux PTB PTH ,
 on aura $PDT+PTH=POT+PTB$, ou
 en réduisant $PDTH=POTB$.

2^o Si l'on ajoute les mêmes triangles PTB
 PTH , au seul triangle POT , on aura
 $POT+PTH=POT+PTB$, ou , ce qui
 revient au même , le triangle PQH égal au
 quadrilatere $POTB$.

3^o Si l'on ajoute les mêmes triangles PTB
 PTH , au seul triangle PDT , on aura
 $PDT+PTB=PDT+PTH$ ou en rédui-
 sant , le triangle BTD égal au trapeze $POTB$.

4^o Enfin si l'on ajoute à ces triangles égaux
 PTB PTH le triangle commun CPT : on

aura le triangle CTB d'une part, égal au triangle CPH de l'autre.

COROLLAIRE II.

180. Si par l'autre extrémité de l'axe IT , on mène la tangente alb perpendiculaire à cet axe, prolongée de part & d'autre jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente PH en a , & le diamètre PCp aussi prolongé en b on aura :

1°. Le triangle Pab égal au triangle IaH , car à cause des parallèles BT bl perpendiculaires à l'axe IT , les triangles Cib CTB seront rectangles & égaux, puisqu'ils ont outre l'angle droit, l'angle C égal de part & d'autre, ainsi que le côté CT égal au côté CI . Mais, par le quatrième article du corollaire précédent $CTB = CPH$ donc aussi, $Cib = CPH$ & ajoutant de part & d'autre le quadrilatère $CPaI$, on aura le triangle Pab égal au triangle IaH .

2°. Si par le point p , extrémité du diamètre Pp , on mène l'ordonnée po & la tangente ph jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe IT en h , on démontrera aisément que le triangle Cph est égal au triangle Cib , de la même manière que le triangle CPH a été démontré égal au triangle CTB . Car puisque le diamètre Pp est coupé en deux également au centre C (num. 143), Les triangles rectangles COP , Cap seront égaux, ayant un angle égal en C & des hypoténuses égales CP cp . Donc $Co = CO$. De plus on démontrera que le point h se déterminera comme le point H , en faisant

$Co:CI::CI:Ch$. Donc on aura $Ch=CH$.
 Donc le triangle Cph sera égal au triangle CPH , & ph sera parallèle à PH , puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux $CP CH Cp Ch$. Donc enfin $Cph=Cib$ puisque $Cib=CPH$.

3°. Il suit encore delà que le trapeze $poIb$ sera égal au triangle $po h$ en ôtant des triangles égaux $Cib Cph$, le triangle commun Cop .

4°. Enfin si l'on mene par le point I origine de l'axe, la ligne Id parallèle à ph & terminée au diametre Cp ; on aura le triangle bId égal au quadrilatere $pdIh$; en ôtant des triangles égaux $Cib Cph$, le triangle commun CId .

COROLLAIRE III.

181. Puisque les triangles $CTB CPH$ sont égaux, les parallélogrammes formés sur ces mêmes lignes $CT TB CP PH$ & doubles de ces triangles, seront aussi égaux entr'eux.

L E M M E.

182. Si l'on prolonge le côté CT d'un triangle CTB (fig. 44), en sorte que le prolongement CI soit égal à CT , & que par des points $O G$, pris comme on voudra sur le côté CT , on mene les droites $OP GF$ parallèles à BT , je dis que les rectangles $IO \times OT, IG \times GT$ seront entr'eux comme les trapezes $POTB GTBF$, c'est-à-dire que l'on aura cette proportion

$$IO \times OT : IG \times GT :: POTB : GTBF.$$

DÉMONSTRATION.

Puisque les droites PO , BT sont parallèles, les triangles CTB COP , seront semblables, & l'on aura $CT':CO'::CTB:COP$.
 Donc *divid.* $CT'-CO':CT':CTB-COP:COP$.
 Mais, par le lemme fondamental

$$CT' - CO' = IO \times OT.$$

Et faisant la réduction $CTB - COP = POTB$.

Donc $IO \times OT : CT' :: POTB : CTB$.

Et *alternando* $IO \times OT : POTB :: CT' : CTB$.

De même, puisque les droites BT GF sont parallèles, les triangles CGF , CTB seront semblables & donneront $CT':CG'::CTB:CGF$, donc *dividen.* $CT'-CG':CT':CTB-CGF:CTB$.

Mais, par le lemme fondamental

$$CT' - CG' = IG \times GT.$$

Et faisant la réduction, $CTB - CGF = GTBF$.

Donc $IG \times GT : CT' :: GTBF : CTB$.

Et *alternando* $IG \times GT : GTBF :: CT' : CTB$.

Donc, puisque les deux proportions résultantes ont la même raison de CT' à CTB . Les deux premières seront aussi égales & donneront

$IO \times OT : POTB :: IG \times GT : GTBF$,
 & *alternando* $IO \times OT : IG \times GT :: POTB : GTBF$.
 Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIV.

THÉOREME.

182. Supposant toutes choses comme dans les propositions précédentes, si par un point E ou e de l'ellipse (Fig: 45, 46, 47), on mène une droite

EF parallèle à la tangente **BT** & une autre droite **ELM** parallèle à la tangente **PH**, je dis que le triangle **EGM** formé par ces deux droites avec l'axe **IT**, est égal au quadrilatère **GTBF**; formé par les parallèles **GT** **BF**, la partie **GT** de l'axe & la partie **BF** du diamètre **CP**.

DÉMONSTRATION.

Cette proposition renferme deux cas principaux.

Le 1^{er}, lorsque le point **E** ou **e**, est pris de manière que le point **M** se trouve sur la partie **CH** de l'axe **IT**, & le point **L** sur la partie **CP** du diamètre.

Le second, lorsque le point **e** ou **é** est pris de manière que la droite **eml** coupe l'axe **IT** dans la partie **Ch** en **m**, & le diamètre dans la partie **Cp** en **l**. Chacun de ces cas en renferme quatre autres, que nous allons détailler, afin qu'il ne reste aucune difficulté sur cette proposition.

1^{ier} Cas. Lorsque le point **E** se trouve entre les points **P** & **T**, ou bien entre les points **I** **p** comme en **e** (Fig. 45).

2^{eme} Cas Lorsque le point **E** est au-delà de **P** par rapport au point **T**, comme en **e**, ou bien en **é** au-delà du point **p** à l'égard du point **I** (Fig. 45.) de manière que le point **g** tombe sur la partie **CT**, & le point **g'** tombe sur la partie **CI** du même axe.

Troisième Cas. Lorsque le point **E** étant toujours au-delà de **P** par rapport à **T**, est placé de

manière que le point G tombe sur la partie CI de l'axe (Fig. 46.) ou lorsqu'étant toujours au-delà du point p par rapport au point I , le point g tombe sur la partie CT .

Quatrième Cas; lorsque le point E (Fig. 47.) est au-delà du point T à l'égard de P , ou bien en e , au-delà du point I par rapport au point p ; en sorte que le point G tombe sur CT & le point g tombe sur CI .

DÉMONSTRATION du 1^{er} cas.

Puisque les droites $EGPO$, $EMPH$ sont parallèles, (fig. 45.) les triangles POH EGM formés par les mêmes lignes avec l'axe IT seront semblables, & l'on aura

$$POH : EGM :: PO : EG \text{ (numéro 33.)}$$

$$PO : EG :: IO \times OT : IG \times GT$$

& par le lemme précédent

$$IO \times OT : IG \times GT :: POTB : GTBF.$$

Donc $POH : EGM :: POTB : GTBF$. Mais par le second article du Corollaire premier de la vingt-troisième Prop. $POH = POTB$ donc $EGM = GTBF$. Ce qu'il falloit démontrer.

Si le point E est en e entre les points I p , on démontrera précisément de la même manière, que le triangle egm sera égal au quadrilatère $gIbf$, en prenant le triangle poh au lieu du triangle POH .

DÉMONSTRATION du 2^{eme} cas.

Si le point est en e au-delà du point P par rapport au point T , de manière que le point g (Fig.

(fig. 45.) tombe toujours sur la partie CT . Les triangles egM POH seront toujours semblables, & on démontrera précisément comme dans le premier cas, que le triangle egM est égal au quadrilatere $gTBf$.

Et si le point E est en e au-delà du point p à l'égard de l'axe, en sorte que la ligne eg' coupe l'axe dans la partie CI , on aura toujours $eg'm = g'lb f'$.

DÉMONSTRATION du 3^{me} cas.

Si le point E , étant toujours au-delà du point P à l'égard de T (fig. 46.), est pris de manière que la droite EG tombe sur la partie CI de l'axe, on comparera le triangle EGM à son semblable $po h$, & l'on démontrera comme dans le premier cas, que ce même triangle est égal au quadrilatere $GlbF$. Puisque le triangle $po h$ est égal au quadrilatere $po Ib$. (num. 180 art. 3^o).

Si dans la même figure le point e étant toujours au-delà du point p à l'égard du point I , est pris de manière que la droite eg tombe sur la partie CT de l'axe, on aura encore le triangle egm égal au quadrilatere $gTBf$, en comparant ce même triangle egm au triangle POH , qui lui est semblable, puisqu'il a les côtés parallèles à ceux du premier.

DÉMONSTRATION du 4^{me} cas.

Enfin lorsque le point E est au-delà de T par rapport à P , (fig. 47.) de manière que la ligne EG tombe sur CT , les triangles POH

H

EGM étant toujours semblables donneront les mêmes proportions, & partant dans ce cas comme dans les précédents, $EGM = GTBF$.

Ce seroit de même si le point étoit en e , en sorte que la droite eg coupât l'axe dans la partie CI : d'où il suit que la proposition est vraie dans tous les cas possibles : ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE

On remarquera que les premiers articles de ces démonstrations ont rapport au premier cas principal, qui est lorsque le point M tombe sur la partie CT & le point L sur le demi diamètre CP , & les seconds ont rapport au second cas principal, qui arrive lorsque le point M tombe sur la partie CI de l'axe IT & le point L dans la partie Cp du diamètre PCp .

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.

183. Supposant toutes choses dans le même état que dans la proposition précédente, je dis que le triangle ELF ou elf ou eLf , (Fig. 45. 46. 47.) formé par les droites LEM ou elm , EGF ou cgf parallèles aux tangentes BT PH , avec le diamètre CP , est égal au quadrilatère $LPHM$ ou $lphm$, formé par la tangente PH sa parallèle LEM , la partie LP du diamètre & la partie MH de l'axe IT prolongé s'il est nécessaire.

DÉMONSTRATION.

Cette proposition ainsi que la précédente

renferme deux cas principaux. Le premier est lorsque le point M tombe dans la partie CH de l'axe IT , & le point L dans la partie CP du diametre pCP .

Le second arrive lorsque les points M L tombent en ml , dans les parties opposées de l'axe & du diametre. Chacun de ces cas en renferme quatre autres qui se démontrent dans l'un & dans l'autre, précisément de la même maniere; c'est pourquoi l'on ne donnera que la démonstration des quatre cas qui sont renfermés dans le premier cas principal.

1^{er} Cas.

Si le point E se trouve entre les points P & T (fig. 45.) Par le quatrieme article du Corollaire premier de la vingt-troisieme Prop. on a $CTB = CPH$. Donc en ôtant de chaque membre le quadrilatre commun $CGEL$, on aura

$$CTB - CGEL = CPH - CGEL.$$

ou $GTBLE = EGHP L.$

ôtant encore de chaque membre de cette dernière égalité des quantités égales, sçavoir du premier le quadrilatre $GTBF$, & du second le triangle EGM , qui lui est égal par la précédente proposition, on aura $GTBLE - GTBF = EGPHL - EGM$, ou en réduisant $ELF = LPHM$. Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.

2^{eme} Cas

Si le point E se trouve en e , (Figure 45.) de maniere cependant que la droite eg tombe

H ij

sur la partie CT de l'axe IT , par la proposition précédente, $eg M = gTBf$, mais $gTBf = gfPH$ en ôtant du quadrilatere $gTBf$, le triangle PAB , & ajoutant au reste $PfgTA$, le triangle TAH égal au précédent par la vingt-troisième Prop. Donc $eg M = gfPH$. Otant encore de chaque membre, le quadrilatere commun $fgML$, on aura d'une part le triangle eLf égal au quadrilatere $LPHM$ de l'autre : Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.

3^{eme} Cas.

Si l'on suppose encore le point E en E au-delà du point P à l'égard de T , mais de maniere que la droite EGF coupe l'axe dans la partie CI , & le diametre dans la partie Cp , (Fig. 46), on a dans ce cas par la précédente proposition, $EGM = GIbF$. Ajoûtant à chaque membre le triangle CFG , on aura

$$EFCM = CIb = CTB = CPH.$$

par le quatrième article du corollaire 1^{er} de la vingt-troisième. Donc en ôtant de chaque membre le triangle CLM , on aura $EFCM - CLM = CPH - CLM$, ou, en réduisant $ELF = LPHM$. C. Q. F. 3^o D.

4^{eme} Cas.

Enfin si le point E est au-delà de l'axe IT par rapport au diametre CP , (fig. 47), de maniere cependant que les points ML tombent sur CT & sur CP ; on a par la précédente $EGM = GTBF$. Ajoûtant à chaque membre le quadrilatere $MGFL$, on aura

le triangle $ELF = \bullet BTML$: ôtant du dernier membre de cette égalité le triangle PAB , & mettant à sa place le triangle TAH qui lui est égal par la vingt-troisième, on aura encore $ELF = LPHM$. Ce qu'il falloit 4° démontrer.

COROLLAIRE.

184. Si l'on imagine que les points L & M (Fig. 48) approchent continuellement du centre C , enfin la droite EML se confondra avec le diamètre RCr & le triangle ELF deviendra le triangle RCF , le quadrilatère $LPHM$ sera confondu avec le triangle CPH , d'où il suit que les triangles CPH , CRF seront égaux entr'eux, puisque dans tous les cas le triangle ELF a été démontré égal au quadrilatère $LPHM$.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÈME.

185. Dans une ellipse IPT dont l'axe est la ligne IT , PCp un diamètre & PH une tangente à l'origine de ce diamètre, terminée à l'axe en H ; je dis que toute ligne, comme Ee parallèle à la tangente PH , est coupée en deux également en L par le diamètre PCp . (Fig. 45, 46, 47 & 48).

DÉMONSTRATION.

Supposant que l'on ait mené les droites EF , ef , eF parallèles à la tangente BT , il est évident par la propo. précéd, que les triang. ELF ,

toujours cette proportion $EL^2:LP \times Lp::CR^2:CP^2$.

DÉMONSTRATION.

A cause des triangles semblables ELF , RCF , on a $EL^2:CR^2::ELF:RCF$. Mais par la proposition 25. $ELF=LPHM$ & (numero 184) $RCF=GPH$. Donc $ELF:RCF::LPHM:CPH$, & par le lemme de l'article 181. $LPHM:CPH::PL \times Lp:CP^2$. Donc $EL^2:CR^2::PL \times Lp:CP^2$ & *alternando* $EL^2:PL \times Lp::CR^2:CP^2$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

193. Puisque l'on a $EL^2:PL \times Lp::CR^2:CP^2$, on aura aussi $EL^2:PL \times Lp::Pp^2:Rr^2$. Car Pp étant double de CP , & Rr double de CR leurs quarrés Pp^2 Rr^2 seront quadruples des quarrés CP^2 CR^2 , ce qui ne peut pas troubler la proportion.

COROLLAIRE II.

194. Si l'on mène une autre ordonnée el au même diamètre CP , on aura encore $el^2:Pl \times lp::CR^2:CP^2$. Mais on a aussi $EL^2:PL \times Lp::CR^2:CP^2$.

Donc puisque les deux derniers rapports de ces proportions sont les mêmes, les premiers seront aussi égaux, & partant on aura

$$EL^2:PL \times Lp::el^2:Pl \times lp.$$

Et *alternando* $EL^2:el^2::PL \times Lp:Pl \times lp$; d'où il suit que les quarrés des ordonnées à un même diamètre sont entr'eux comme

les produits des abscisses correspondantes.

COROLLAIRE III.

195. Si les diametres conjugués sont égaux, les quarrés des ordonnées seront égaux aux produits de leurs abscisses, & ces mêmes ordonnées seront moyennes proportionelles entre les mêmes abscisses. Quoique cette propriété soit la principale propriété du cercle, il ne faut pas conclure pour cela, qu'une courbe sera un cercle, toutes les fois que le rectangle des abscisses sera égal au quarré de l'ordonnée, à moins que l'ordonnée ne fasse un angle droit avec son diamètre. Car en réunissant ces deux conditions ensemble, la figure ne peut être qu'un cercle, dans la supposition que la courbe est terminée. au lieu qu'elle ne peut être qu'une ellipse dans le cas de tout autre angle.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÈME.

196. Supposant toujours les choses dans le même état : si par un point *E* de l'ellipse, on mene une droite *Ee*, (Fig. 49). parallèle au diamètre *CP*, je dis que cette ligne sera coupée en deux également en *O* par le diamètre *CR* conjugué au premier *CP*, & de plus que l'on aura cette proportion.

$$OE^2 : EO \times OR :: CP^2 : CR^2.$$

DÉMONSTRATION.

1°. Par les points *E* & soient menées les droites *EL* & *el* parallèles à la tangente *PH* & par conséquent au diamètre conjugué *CR*. Par

la proposition précédente on a (numero 194).

$$EL^2 : el^2 :: pL \times PL : pl \times Pl :: CP^2 - CL^2 : Cp^2 - Cl^2.$$

Car par le lemme fonda. $pL \times PL = CP^2 - CL^2$.

Et $pl \times Pl = Cp^2 - Cl^2$; puisque la droite Pp est coupée en deux parties égales en C & en deux parties inégales en L & l . Mais à cause des parallèles Pp Ee , les droites EL et el aussi parallèles entr'elles, sont des ordonnées égales. Donc $EL = el$. Donc $CP^2 - CL^2 = Cp^2 - Cl^2$. Mais $CP^2 = Cp^2$. Donc aussi $CL^2 = Cl^2$. Donc $CL = Cl$ & partant $EO = eO$.
Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.

2^o. $OE^2 : RO \times Or :: CP^2 : CR^2$. Car par la précédente proposition

$$EL^2 : PL \times Lp \text{ ou } CP^2 - CL^2 :: CR^2 : CP^2.$$

Donc alternando. $EL^2 : CR^2 :: CP^2 - CL^2 : CP^2$.

Donc desrahendo.

$$CR^2 : CR^2 - EL^2 :: CP^2 : CP^2 - CP^2 + CL^2.$$

Et réhui. $CR^2 : CR^2 - CO^2$ ou $RO \times Or :: CP^2 : CL^2$

ou OE^2 . Donc invert. $OE^2 : CP^2 :: RO \times Or : CR^2$.

Et enfin altern. $OE^2 : RO \times Or :: CP^2 : CR^2$.

Ce qu'il falloit 2^o démontrer.

COROLLAIRE . I.

197. On aura comme dans la proposition précédente $OE^2 : RO \times Or :: Rr^2 : Pp^2$ & si l'on mene une autre ordonnée eo parallèle au diamètre PCp ; on aura encore

$$OE^2 : oe^2 :: RO \times Or : Ro \times or :: CR^2 - CO^2 : CR^2 - eo^2.$$

COROLLAIRE II.

198. Si par le point R on mene RX pa-

parallèle à Pp , cette ligne sera tangente en R . Car puisque le diamètre rR est conjugué au diamètre pP , & parallèle à la tangente PH , réciproquement le diamètre pP sera conjugué au diamètre rR , & la tangente en R lui sera parallèle.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÈME.

199. Soit une ellipse $prPR$, dont Pp Rr (Fig. 49) sont deux diamètres conjugués, EL une ordonnée au diamètre Pp , dont les abscisses sont LP Lp ; si par le point P origine du diamètre Pp , on élève la perpendiculaire PM égale au paramètre de ce diamètre, & qu'ayant joint les points pM , par la droite pM , on fasse cette proportion $Pp : PM :: pL : LN$ ou PK , je dis que le carré de l'ordonnée EL sera égal au produit de cette droite PK par l'abscisse PL , ou, ce qui revient au même, que l'on aura cette égalité $EL^2 = PK \times PL$.

DÉMONSTRATION.

Par le corollaire 1^{er} de la vingt-septième proposition (N^o 193), on a $PL \times Lp : EL^2 :: Pp^2 : Rr^2$ & par la propriété du paramètre

$Pp^2 : Rr^2 :: Pp : PM$ & par hypothèse on a fait $Pp : PM :: pL : PK$.

Donc $PL \times Lp : EL^2 :: Lp : PK :: Lp \times PL : PK \times PL$. Mais $PL \times Lp = Lp \times PL$ donc aussi $EL^2 = PK \times PL$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE. I.

200. Si l'on achève le rectangle du diame-

tre Pp par son parametre, & qu'on prolonge les droites LN KN , jusqu'à ce qu'elles rencontrent les côtés VM Vp de ce rectangle aux points IS ; il est visible que les rectangles MN pN seront semblables au rectangle total pM , car puisque l'on a fait $pP:PM::pL:LN$ ou PK , on aura *altern.* $pP:pL::PM:PK$ & *dividendo* $Pp-pL:pP::PM-PK:PM$ réduisant & alternant LP ou $KN:KM::pP:PM$, d'où il suit que les rectangles MN pN , ont les côtés proportionnels à ceux du rectangle total pM , & lui sont par conséquent semblables.

COROLLAIRE. II.

201. Puisque l'on a $EL^2 = LP \times PK$, on aura aussi $EL^2 = Lp \times MK$, ou $SN \times IN$, car il est évident que les rectangles PN VN sont égaux, puisqu'ils les ont côtés réciproques autour de l'angle droit. D'où il suit que généralement le carré d'une ordonnée à un diametre quelconque, est égal au rectangle de l'une de ses abscisses PL ou pL par le parametre, moins un rectangle semblable à celui du diametre par le même parametre. Car $PN = LP \times PM - LP \times MK$, ou, ce qui est la même chose, le rectangle PN est égal au rectangle PI moins le rectangle MN qui est semblable au rectangle pM par le corollaire précédent, Et de même $VN = pL \times PM - pL \times NL$. Ce qui montre suffisamment que les propriétés des diametres sont précisément les mêmes que

telles des axes, & c'est de cette dernière propriété, commune à tous les diamètres, que l'ellipse prend son nom, comme on l'a déjà démontré par rapport aux axes, (N° 140).

L E M M E.

* 202. Une ellipse $ADBE$ (Fig. 50), dont AB DE sont deux diamètres conjugués, étant donnée; si par un point R pris au dedans ou au dehors de cette courbe on mène une droite RFG parallèle au diamètre DE , & que par le point R & les points FG , ou cette ligne rencontre l'ellipse on mène les droites RO FL GM , parallèles à l'autre diamètre AB & terminés au diamètre DE , je dis que la différence des rectangles.

$EO \times OD - EL \times LD = LO \times OM$ dans le premier cas, & que dans le second cas

$$EL \times LD - EO \times OD = LO \times OM.$$

D É M O N S T R A T I O N.

1° Supposons d'abord que le point R est pris au dedans de l'ellipse, en ce cas $EO = EL + LO$, & $OD = LD - LO$. Donc $EO \times OD = EL \times LD + LO \times LD - EL \times LO - LO \times LO$. Donc en faisant passer dans l'autre membre $EL \times LD$, on aura $EO \times OD - EL \times LD = LO \times LD - EL \times LO - LO \times LO = (LD - EL - LO) \times LO$. Mais à cause des parallèles DE GR les ordonnées MG LF sont égales, & partant leurs abscisses CM CL le seront aussi (195). Donc $EL = MD$.

Donc $(LD - EL - LO) \times LO = (LD - MD - LO) \times LO = (LM - LO) \times LO = OM \times LO$. Donc $EO \times OD - EL \times LD = OM \times LO$. C. Q. F. 1^o D.

2^o Supposons présentement que le point R est au dehors de l'ellipse ; on aura dans ce cas $EL = EO + LO$, & $LD = OD - LO$. Donc $EL \times LD = EO \times OD + LO \times OD - EO \times LO - LO \times LO$. Donc en faisant passer dans le premier membre $EO \times OD$, on aura $EL \times LD - EO \times OD = LO \times OD - EO \times LO - LO \times LO = (OD - EO - LO) \times LO$. Mais $EO + LO = EL = MD$, puisque les ordonnées LF GM sont égales, donc $(OD - EO - LO) \times LO = (OD - MD) \times LO = OM \times LO$, donc $EL \times LD - EO \times OD = OM \times LO$. Ce qu'il falloit 2^o démontrer. *

PROPOSITION XXX.

THEOREME.

203. Si deux droites quelconques FG IH , parallèles à deux diamètres conjugués d'une ellipse, se rencontrent dans un point R au dedans ou au dehors de cette courbe (Fig. 30). Je dis que les rectangles des sécantes seront entr'eux comme les quarrés des diamètres qui leur sont parallèles, c'est-à-dire que l'on aura $HR \times RI : FR \times RG :: AB^2 : DE^2$.

DÉMONSTRATION.

1^{er} Cas. Supposons d'abord que les droites FG IH se coupent au dedans de l'ellipse. Des points F G où l'une d'elles rencontre la courbe, soient menées les droites FL GM

parallèles au diamètre CB, qui seront par la même raison ordonnées au diamètre CE conjugué au premier (numero 185 & 187). Cela posé, puisque les droites OI LF sont ordonnées au même diamètre CE ; on aura (N° 193) $LF^2 : OI^2 :: EL \times LD : EO \times OD$.

Donc *dividendo*

$$OI - LF^2 : LF^2 :: EO \times OD - EL \times LD : EL \times LD.$$

Mais $OI - LF^2 = OI^2 - OR^2$ puisque LF est égal à OR à cause des parallèles ED GR, & par le lemme fonda. $OI^2 - OR^2 = HR \times RI$ puisque la ligne IH est coupée en deux parties égales en O, par le diamètre DE auquel elle est ordonnée, & en deux parties inégales au point R. De plus par le lemme précédent $EO \times OD - EL \times LD = LO \times OM$.

Donc en substituant ces nouvelles valeurs dans la proportion précédente, elle deviendra celle-ci $HR \times RI : LF^2 :: LO \times OM : EL \times LD$. Mais à cause des parallèles LF, GM, FG, ML, on a $LO = RF$ & $OM = RG$ donc $LO \times OM = FR \times RG$. Donc en mettant cette nouvelle expression on aura $HR \times RI : LF^2 :: FR \times RG : EL$. Où *alternando* $HR \times RI : FR \times RG :: LF^2 : EL \times LD$. Et (num. 195). $LF^2 : EL \times LD :: CB^2 : CE^2$. Donc $HR \times RI : FR \times RG :: CB^2 : CE^2$. Ce qu'il falloit 1° démontrer.

2^{me} Cas. Si les droites FG IH se coupent au dehors de l'ellipse, on aura à cause des ordonnées LF OI au diamètre DE, $CE^2 : LF^2 : OI^2 :: EL \times LD : EO \times OD$. Donc *divid.*
 $LF^2 - OI^2 : OI^2 :: EL \times LD - EO \times OD : EO \times OD$

Mais $LF = OI = OR - OI$: puisque
 $OR = LF$, & par le lemme fondamental,
 $OR - OI = HR \times RI$, de plus par le lemme
 précéd. $EL \times LD = EO \times OD = LO \times OM = FR \times RG$,
 puisque $LO = FR$, & que $OM = RG$, com-
 me il est évident à cause des parallélogram-
 mes $ROLF$ $OMGR$: donc en substituant
 ces nouvelles expressions à la place de leurs
 égales, la proportion précédente deviendra
 celle-ci. $HR \times RI : OI :: FR \times RG : EO \times OD$.
 Ou alternando $HR \times RI : FR \times RG :: OI : EO \times OD$
 & (numero 195). $OI : EO \times OD :: CB : CE$.
 Donc $HR \times RI : FR \times RG :: CB : CE$.
 Ce qu'il falloit 2° démontrer.

REMARQUE.

* La proposition que l'on vient de démontrer
 dans le cas où les sécantes sont parallèles à des
 diamètres conjugués, est encore vraie dans tout
 autre cas, c'est-à-dire, lorsque les diamètres pa-
 rallèles aux sécantes intérieures ou extérieures, ne
 sont pas conjugués l'un à l'autre ; c'est pourquoi
 nous allons joindre les propositions suivantes pour
 la démontrer dans toute la généralité qui lui con-
 vient. Elles sont d'autant plus intéressantes qu'elles
 servent à la solution des problèmes les plus curieux
 que l'on puisse proposer sur les sections coniques,
 au moins dans les éléments, & que l'on démontre
 par leur moyen toutes les propriétés du cercle d'une
 manière générale par des corollaires qui sont des
 suites immédiates de ces mêmes propositions.

Proposition

PROPOSITION XXXI.

THÉORÈME.

204. *Ayant une tangente DS (fig. 51) terminée en S par le prolongement d'un diamètre quelconque CH, si par le centre C, on mène le diamètre LCl parallèle à la tangente DS, je dis que l'on aura $DS^2 : SR \times SH :: CL^2 : CH^2$, c'est-à-dire que le carré de la tangente DS, sera au rectangle de la sécante entière SR qui passe par le centre, par sa partie extérieure SH, comme le carré du demi diamètre CL parallèle à cette tangente, est au carré du demi diamètre CH dont le prolongement va rencontrer la tangente en S.*

DÉMONSTRATION.

Par l'origine H du diamètre CH soit menée l'ordonnée HK au diamètre CD qui passe par le point touchant D, & parallèle à la même tangente. Les triangles CDS CKH seront évidemment semblables, & donneront $CH : CS :: KH : DS$ donc $DS = \frac{CS \times KH}{CH}$ & partant $DS^2 = \frac{CS^2 \times KH^2}{CH^2}$ Mais KH étant une ordonnée au diamètre CD, on aura (par la 27^{me} proposition num. 191).

$KH^2 : CD^2 - CK^2 :: CL^2 : CD^2$; puisque le diamètre CL est conjugué au diamètre CD. D'où l'on déduit $KH^2 = \frac{(CD^2 - CK^2) \times CL^2}{CD^2}$ Mais à cause des mêmes triangles semblables CKH CDS, on a $\frac{CD^2 - CK^2}{CD^2} = \frac{CS^2 - CH^2}{CS^2}$. Car $CD : CK :: CS : CH$, donc $CD^2 : CK^2 :: CS^2 : CH^2$

& divid. $CD^2 - CK^2 : CD^2 :: CS^2 - CH^2 : CS^2$
ou bien en mettant les rapports égaux de
cette proportion sous la forme d'une fraction
 $\frac{CD^2 - CK^2}{CD^2} = \frac{CS^2 - CH^2}{CS^2}$, Et substituant cette der-
niere expression dans la valeur de KH^2 , on
aura $KH^2 = \frac{CS^2 - CH^2}{CS^2} \times CL^2$ d'où l'on déduit
en substituant encore cette nouvelle va-
leur de KH^2 dans l'expression de DS^2 , cet-
te nouvelle égalité $DS^2 = \frac{CS^2}{CH^2} \times \frac{CS^2 - CH^2}{CS^2} \times CL^2$
 $= \frac{CS^2 - CH^2}{CH^2} \times CL^2$ d'où l'on tire aisément
 $DS^2 : CS^2 - CH^2 :: CL^2 : CH^2$. Mais par le
lemme fondamental $CS^2 - CH^2 = SR \times SH$,
donc enfin on aura $DS^2 : SR \times SH :: CL^2 : CH^2$.
Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

205. Si les diametres CH CL sont égaux,
leurs quarrés le seront aussi, & partant
 $DS^2 = SR \times SH$ dans cette supposition, c'est-
à-dire, que la tangente sera moyenne pro-
portionnelle entre la sécante entiere RS & sa
partie extérieure SH . Ce qui doit toujours
arriver dans le cercle puisque tous ses diame-
tres sont égaux.

PROPOSITION XXXII.

THÉOREME.

206. Si deux droites quelconques AB MN
(Fig. 52 53.) se coupent dans un point O ,
au dedans ou au dehors de l'ellipse, & que par le
centre C , on tire les diametres CE CL parallèles
aux sécantes AB MN ; je dis que l'on aura tou-

*Soit cette propor., AO×OB:MO×ON::CL²:CE²,
c'est-à-dire, que les rectangles des parties de deux
secantes quelconques, seront toujours entr'eux comme
les quarrés des diametres qui leurs sont parallèles.*

DÉMONSTRATION.

Par le centre C, & le point F milieu de
AB, soit mené le diametre CFD au point
D origine du diametre CD soit menée la
tangente DS parallèle à AB, & terminée en
S par le prolongement du diametre CH qui
passe par le point O ou se coupent les sécantes
AB MN. Cela posé, puisque la droite
AB est coupée en deux également en F, &
en deux inégalement en O, on aura par le
lemme fondamental $AO \times OB = BF^2 - OF^2$ &
BF étant une ordonnée au diametre CD,
on démontrera comme dans la proposition pré-
cédente, que son quarré $BF^2 = \frac{CS^2 - CO^2}{CS^2} \times CL^2$
à cause des triangles semblables, CSD COF,
qui donnent $CD:CF::CS:CO$. Pour avoir
 OF^2 , on se servira des mêmes triangles sem-
blables CSD COF, qui nous donnent
 $CS^2:CO^2::DS^2:OF^2 = \frac{DS^2 \times CO^2}{CS^2}$ Mais par
la proposition précédente $DS^2 = \frac{CS^2 - CH^2}{CH^2} \times CL^2$,
donc $FO^2 = \frac{(CS^2 - CH^2)}{CH^2} \times CL^2 \times \frac{CO^2}{CS^2}$ & retran-
chant FO^2 de BF^2 , il vient

$$BF^2 - FO^2 = \frac{CS^2 - CO^2}{CS^2} \times CL^2 - \frac{(CS^2 - CH^2)}{CH^2} \times CL^2 \times \frac{CO^2}{CS^2}$$

& faisant les multiplications indiquées, on aura

$$BF^2 - FO^2 = \frac{CS^2 \times CL^2}{CS^2} - \frac{CO^2 \times CL^2}{CS^2} - \frac{CS^2 \times CL^2 \times CO^2}{CH^2 \times CS^2} +$$

$$\frac{CH^2 \times CL^2 \times CO^2}{CH^2 \times CS^2} \text{ Mais } - \frac{CO^2 \times CL^2}{CS^2} \text{ est détruit par}$$

+ $\frac{CH_2 \times CL_2 \times CO_2}{CH_2 \times CS_2}$ qui se réduit à la même expression en divisant le numérateur & le dénominateur par CH^2 . Et partant $BF^2 - OF^2 = \frac{CS_2 \times CL_2}{CS_2} - \frac{CS_2 \times CL_2 \times CO_2}{CH_2 \times CS_2} = CL^2 - \frac{CL_2 \times CO_2}{CH_2} = \frac{CL_2 \times CH_2 - CL_2 \times CO_2}{CH_2} = \frac{(CH_2 - CO_2)}{CH_2} \times CL^2$ d'où l'on tire $BF^2 - FO^2$ ou $AO \times OB : CH^2 - CO^2$ ou $RO \times OH :: CL^2 : CH^2$.

Et alternando $AO \times OB : CL^2 :: RO \times OH : CH^2$.
On fera voir précisément de même que
 $MO \times ON : CE^2 :: RO \times OH : CH^2$.

Donc puisque ces deux proportions ont même dernier rapport, on aura

$AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$. Ce qu'il falloit 1^o démontrer.

2^o Si les sécantes AB MN se coupent au dehors de l'ellipse, la démonstration ne changera pas, car on démontrera toujours en suivant le même procédé, que

$AO \times OB : CL^2 :: RO \times OH : CH^2$. Toute la différence consiste en ce que l'on auroit $OF^2 - BF^2$ à la place $AO \times OB$ & $CO^2 - CH^2$ à la place de $RO \times OH$, au lieu que ces produits dans le premier cas sont représentés par $BF^2 - OF^2$ & par $CH^2 - CO^2$.

COROLLAIRE I.

207. Si l'on imagine que les sécantes AB MN (Fig. 53.) se meuvent parallèlement à elles mêmes, jusqu'à ce qu'elles deviennent tangentes en D & en I , aux extrémités D I des diamètres qui les divisent en deux également, dans ce cas le point O se confondra

avec le point T , ou les tangentes IT DT se rencontrent, & les rectangles $AO \times OB$, $MO \times ON$ deviendront les quarrés des tangentes, ce qui donnera

$$DT^2 : IT^2 :: CL^2 : CE^2 \text{ \& par la présente on a } \\ CL^2 : CE^2 :: AO \times OB : MO \times ON.$$

Donc $DT^2 : IT^2 :: AO \times OB : MO \times ON$, c'est-à-dire que les rectangles des sécantes AB MN , font entr'eux comme les quarrés des tangentes qui leur sont parallèles; prises depuis leur intersection jusqu'au point d'attouchement. D'où l'on voit que cette propriété convient à l'ellipse comme à la parabole (num. 83) & l'on verra par la suite qu'elle est commune à toutes les sections coniques.

COROLLAIRE II.

208. Si les diametres ou les tangentes supposés parallèles aux sécantes sont égaux entr'eux, les droites AB MN se couperont en parties réciproques, soit au dedans soit au dehors de l'ellipse, & comme dans le cercle tous les diametres sont égaux entr'eux, ainsi que les tangentes qui se rencontrent deux à deux; deux sécantes quelconques extérieures ou intérieures doivent s'y couper en parties réciproques. Ensorte que cette proposition renferme la démonstration la plus générale des propriétés du cercle que l'on peut regarder comme une ellipse particulière dont tous les diametres sont égaux, ou dont les deux foyers sont réunis en un seul.

COROLLAIRE. III.

209. Supposant toujours les diametres CD CI , qui divisent les droites AB MN en deux également, dont les demi parametres soient P p . Puisque l'on a $AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$, on aura aussi $AQ \times OB : MQ \times ON :: CD \times P : CI \times p$. Car puisque les diametres CL CE sont parallèles aux sécantes AB MN , ils sont conjugués aux diametres CD CI qui divisent ces droites en deux parties égales & partant $CL^2 = CD \times P$ & $CE^2 = CI \times p$. & comme dans la parabole tous les diametres sont infinis, les produits $AO \times OB$, $MO \times ON$, sont entr'eux comme les parametres des diametres qui divisent ces mêmes sécantes en deux également. (num. 82).

COROLLAIRE IV.

210. Si l'une des sécantes AB (Fig. 53.) devient tangente en D , & que l'autre MN prolongée, s'il est nécessaire, la rencontre en o , on aura $Do^2 : Mo \times oN :: CL^2 : CE^2 :: DT^2 : IT^2$ (206). Et si les diametres ou les tangentes parallèles aux sécantes sont égaux entr'eux, la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière & sa partie extérieure, puisque dans ce cas $Do^2 = Mo \times oN$. Ce qui doit toujours arriver dans le cercle, puisque tous les diametres sont égaux ainsi que les tangentes qui se rencontrent deux à deux.

COROLLAIRE V.

211. Si l'une des sécantes AB , par exemple, est coupée en deux également en F par une sécante dD (Fig. 52) qui passe par le centre, alors le produit $AO \times OB$ deviendra le quarré de AF , le produit $MO \times ON$ deviendra $DF \times Fd$ & le demi diamètre parallèle à la sécante sera le demi diamètre CD lui-même, & la proportion deviendra celle-ci $AF^2 : FD \times Fd :: CL^2 : CD^2$. C'est-à-dire que le quarré d'une ordonnée est au produit de ses abscisses, comme le quarré d'un diamètre parallèle à cette ordonnée est au quarré de celui auquel cette ligne est ordonnée.

R E M A R Q U E.

Cette propriété qui est la principale de l'ellipse, & de laquelle nous sommes partis, devient un corollaire de la présente proposition qui est la plus générale que l'on puisse donner sur cette courbe, & qui renferme sa nature de la manière, la plus complète. Si notre esprit nous permettoit de nous élever tout d'un coup aux idées les plus générales pour descendre ensuite dans le détail de ce qu'elles renferment au dessous d'elles, on auroit pu définir l'ellipse comme il suit.

L'ellipse est une courbe rentrante, telle que les produits de deux sécantes quelconques terminées à cette courbe, sont entr'eux comme les quarrés de deux lignes parallèles à ces sécantes qui diviseroient chacune la courbe en deux par

ties égales & que pour cette raison on appelleroit diametres de la courbe. Mais comme nous ne pouvons saisir les vérités qu'en les détachant pour ainsi dire les unes des autres ; nous sommes obligés de suivre une méthode différente en commençant par des vérités de détail, pour arriver aux plus générales. & comme cette méthode n'est en usage que parce qu'elle est la plus proportionnée à la foiblesse de nos organes, & non qu'elle soit en effet la plus belle, il suit que l'on approchera d'autant plus de la méthode vraiment géométrique, que l'on pourra prendre les propositions dans leur plus grande généralité, sans déroger à la clarté nécessaire pour conduire notre raison dans la recherche de la vérité.

COROLLAIRE VI.

212. Si par un point *D* pris sur l'ellipse (Fig. 54.) on mene parallèlement aux droites *AB MN* prolongées, s'il est nécessaire, les lignes *DF DP* qui les coupent aux points *K G* ; on aura $DK \times KF : MK \times KN :: CL^2 : CE^2$. Puisque les droites *MN DF*, sont parallèles aux diametres *CL CE* & qu'elles se coupent mutuellement ; on aura de même $AG \times GB : GD \times GP :: CL^2 : CE^2$. Puisque les droites *AB PD* sont des sécantes parallèles aux diametres *CL CE*, d'où l'on déduit encore les trois proportions suivantes $DK \times KF : MK \times KN :: AO \times OB : MO \times ON$ $AG \times GB : GD \times GP :: AO \times OB : MO \times ON$ & $DK \times KF : MK \times KN :: AG \times GB : GD \times GP$. Ce qui est évident par tout ce qui précède.

R E M A R Q U E.

On tire de cette Proposition & du dernier Corollaire, la solution de plusieurs Problèmes pour faire passer une Ellipse par plusieurs points donnés dans de certaines conditions, comme si l'on proposoit de trouver une Ellipse qui passât par trois points donnés, & dont un diametre soit égal à une ligne donnée de grandeur, pourvu que ces trois points ne soient pas en ligne droite. On va voir dans le Problème suivant, qui est un des plus compliqués, la manière dont il faudroit s'y prendre pour résoudre ceux qui le seroient moins, par le moyen de la proposition précédente.

PROPOSITION XXXIII.

P R O B L È M E.

213. Etant donnés cinq points *A M B N D* sur un même plan (Fig. 54.) non en ligne droite; & qui puissent former une courbe rentrante, toujours concave d'un même côté, trouver une Ellipse qui passe par ces mêmes points.

SOLUTION.

Ayant joint deux points *A B* par la droite *AB*, & deux autres points *M N* par la droite *MN*, par le cinquième point *D*, on menera une droite *DK* parallèle à *AB*, & prolongée indéfiniment vers *F*, puis on fera cette proposition $MO \times ON : AO \times OB :: MK \times KN : DK \times KF$, & ensuite on cherchera une droite $KF = \frac{AO \times OB \times MK \times KN}{MO \times ON \times DK}$, qui donnera sur la ligne *DK* un point *F* dé-

terminé, puisque toutes les lignes qui forment le numérateur & le dénominateur de cette fraction sont déterminées de grandeur par la position respective des points $A M B N D$. Pareillement pour avoir un point P fixé sur la droite GD , menée par le point D parallèlement à la droite MN , & qui coupe la droite AB au point G , on fera cette analogie $AO \times OB : MO \times ON :: GB \times GA : GD \times GP$, & l'on cherchera ensuite une droite $GP = \frac{MO \times ON \times GB \times GA}{AO \times OB \times GD}$, & comme toutes les lignes qui composent la valeur de GP sont connues, on pourra aussi connoître GP .

Pour trouver après cela le centre de l'Ellipse qui doit passer par les points donnés, par les milieux QS des droites PD , MN , parallèles par construction, on menera une droite indéfinie RCr ; pareillement par les points TV , milieux des deux droites parallèles AB , DF on menera une autre droite indéfinie $ZTVX$, qui coupera la droite Rr dans un point C qui sera le centre de l'Ellipse dont les droites Rr ZX seront des diamètres.

Enfin pour déterminer sur une de ces droites par exemple, sur RCr le point R ou r , qui doit être l'origine de son diamètre, on remarquera que les droites PD MN étant parallèles entr'elles par construction, & coupées également aux points QS , seront des doubles ordonnées au diamètre RCr , & partant on aura (num. 193). $MS^2 : PQ^2 :: CR^2 - CS^2 : CR^2 - CQ^2$, d'où l'on tire $CR^2 = \frac{MS^2 \times CQ^2 - PQ^2 \times CS^2}{MS^2 - PQ^2}$

ou $CR = \frac{\sqrt{MS^2 \times CQ^2 - CS^2 \times PQ^2}}{\sqrt{MS^2 - PQ^2}}$ dont on trouveroit aisément la valeur par le moyen du cercle ; ayant ainsi trouvé le diametre CR , dont on a déjà l'ordonnée MS , on trouvera facilement son conjugué en faisant cette proposition $CR^2 - CS^2 : MS^2 :: CR^2 : CE^2$, & l'on décrirait ensuite l'Ellipse avec les deux diametres conjugués, comme il sera expliqué au Livre de la description des Sections coniques.

DÉMONSTRATION.

Pour bien concevoir la raison de toutes ces opérations, il suffit de faire attention que les droites FD PD étant parallèles aux droites AB MN , seront aussi parallèles aux diametres CE CL que l'on doit supposer parallèles à ces mêmes droites AB MN , & partant par le corollaire sixième de la proposition précédente, les proportions dont on s'est servi pour déterminer les points FP , doivent avoir lieu. D'ailleurs on voit clairement qu'il n'y avoit dans chacune que la quantité DF ou GP qui fût inconnue & par conséquent les mêmes proportions sont suffisantes pour les déterminer. La manière dont on a trouvé le centre de l'Ellipse n'a pas besoin de démonstration puisque les droites Rr ZX étant des diametres dont les lignes DP MN AB MF sont les doubles ordonnées leur intersection commune est nécessairement le centre de l'Ellipse.

OBSERVATION.

Les Commençaans pourroient être embarrassés à déterminer les droites KF ou GP ; mais l'opération qu'il faudroit faire pour cela n'a rien de difficile comme on le va voir. On prendroit une ligne droite ab moyenne proportionnelle en les droites AO & OB , on prendra de même une moyenne cd entre les droites MO & ON , & enfin une moyenne fg entre GB & GA , & la proportion $AO \times OB : MO \times ON :: GB \times GA : GD \times GP$ deviendroît celle-ci :

$ab^2 : cd^2 :: fg^2 : GD \times GP$ & tirant les racines $ab : cd :: fg : \sqrt{GD \times GP}$ & cherchant une quatrième proportionnelle aux droites ab cd fg , on auroit une ligne hl égale à $\sqrt{GD \times GP}$. D'où l'on auroit $hl^2 = GD \times GP$. Ce qui montre que la question se réduit à trouver une troisième proportionnelle aux droites hl & GD qui sont entièrement connues. On trouveroit la ligne KF précisément de la même manière.

Si le point D (Fig. 55.) est placée de manière que la droite DG parallèle à MN , tombe sur le prolongement de la ligne AB , & que la droite DK parallèle à AB tombe sur celui de la ligne MN , alors au lieu de prendre le point P au-delà du point G à l'égard de D , on le prendra entre les points DK ; ce qui ne change rien à la solution du problème. Dans ce cas les droites KD , KM , GD , GA sont des sécantes extérieures à l'Ellipse qui doit passer

par les points donnés, au lieu que dans la Figure 54, les mêmes lignes sont des sécantes intérieures.

Si le point M n'étoit pas au-delà de la ligne AB , à l'égard des points DN , mais en-deçà comme en m ; il est clair que l'on ne pourroit point faire passer une Ellipse par les cinq points donnés, mais on pourroit y faire passer une hyperbole. A moins que les diametres qui divisent les droites AB MN & leurs parallèles DF DP , en deux également ne se trouvassent parallèles, auquel cas, la courbe qui passeroit par ces points seroit une parabole. Il suit encore de cette position, qu'il ne peut y avoir qu'une section conique qui passe par cinq points donnés. Car les diametres qui divisent les sécantes AB MN & leurs parallèles en deux également, concourent où ils sont parallèles entr'eux. S'ils concourent, la courbe sera une ellipse en cas que ces points appartiennent à une courbe rentrante toujours concave d'un même côté, & elle sera une hyperbole, lorsque la courbe ne pourra être une courbe rentrante. Enfin dans le second cas, il ne peut y avoir que la parabole qui passe par cinq points donnés: puisque cette courbe est la seule dont les diametres soient parallèles.

Il suit encore de-là que deux sections coniques ne peuvent avoir cinq points communs & par conséquent qu'elles ne peuvent se couper qu'en quatre points.

Au reste comme on n'a pas encore donné

les propriétés de l'hyperbole, il nous suffit de sçavoir en quel cas une ellipse peut passer par cinq points donnés pour montrer l'usage que l'on peut faire des propriétés des sécantes intérieures & extérieures.

PROPOSITION XXXIV.

THÉOREME.

214. Si par un point *D* extrémité d'un diamètre quelconque *CD* (Fig. 56.), on mene une tangente *DS* terminée en *S* par le prolongement d'un autre diamètre *CH* & une ordonnée *DG* au même diamètre *CH* ; je dis que l'on aura $CG:CH::CH:CS$. C'est-à-dire que la sous-tangente *CS* prise sur le diamètre *CH* sera troisième proportionnelle à l'abscisse *CG* & au diamètre *CH*.

DÉMONSTRATION.

Du point *H* soit menée l'ordonnée *HK* au diamètre *CD*, & la tangente *HP* parallèle à la droite *GD*, qui coupera la tangente *DS* en *P*. Imaginons de plus que cette même tangente *HP* est prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre le diamètre *CD* aussi prolongé en *Q*. Enfin soient prolongées les ordonnées *HK DG* jusqu'à ce qu'elles rencontrent de nouveau l'ellipse en *h* & *d* : puisque ces droites *Dd Hh* sont des doubles ordonnées aux diamètres *CH CD*, chacune d'elles sera coupée en deux parties égales aux points *G K* & elles se couperont réciproquement en parties

inégales au point O ; cela posé, par le lemme
fondamental $DO \times Od = DG^2 - GO^2$ &
 $OH \times Oh = HK^2 - OK^2$ & supposant encore
les demi-diametres CM CL parallèles aux
sécantes Dd Hh, on aura par la proposition pré-
cédente

$DO \times Od : HO \times Oh :: CM^2 : CL^2 :: PH^2 : PD^2$
(num. 206). Mais à cause du parallélogramme
PODH, $PH = DO$ & $PD = OH$, donc on
aura $DO \times Od : HO \times Oh :: DO^2 : OH^2$ d'où
l'on déduit en divisant les deux antécédents
par DO, & les deux conséquents par OH,

$Od : Oh :: DO : OH$, ou

$DG + OG : HK + OK :: DO : OH$. Mais on
a $DG^2 - OG^2 : HK^2 - OK^2 :: DO^2 : OH^2$.
Donc en divisant ces deux proportions par
ordre, on aura

$\frac{DG^2 - OG^2}{DG + OG} : \frac{HK^2 - OK^2}{HK + OK} :: \frac{DO^2}{DO} : \frac{OH^2}{OH}$ ou

$DG - OG : HK - OK :: DO : OH$. On aura
donc $DG + OG : DG - OG :: HK + OK : HK - OK$
puisque nous avons deux proportions qui ont
le même dernier rapport DO : OH.

Et *dividendo*

$DG + OG - DG + OG : DG + OG :: HK + OK - HK + OK : HK + OK$.

Réduisant & alternant

$2OG : 2OK :: DG + OG : HK + OK :: DO : OH$.

Et enfin prenant la moitié des deux termes

$OG : OK :: OD : OH$.

D'où il suit que les triangles GOH DOK
sont égaux puisqu'ils ont un angle égal en O
compris entre les côtés réciproques OG OH,
OD KO. Donc en leur ajoutant le triangle
DOH, les nouveaux triangles DGH DKH

seront encore égaux, & comme ils ont une base commune DH , les droites GK DH qui les comprennent seront parallèles & les triangles semblables CKG , CDH donneront $CG:CH::CK:CD$ & à cause des triangles CKH CDS aussi semblables,

on aura $CK:CD::CH:CS$ donc $CG:CH::CH:CS$. Ce qu'il falloit démonstr.

COROLLAIRE I.

215. Puisque les droites GK DH sont parallèles ainsi que les droites GD QH , les triangles semblables CKG CDH CGD CQH ; donneront $CK:CD::CG:CH$

$$CG:CH::CD:CQ$$

donc on aura aussi $CK:CD::GD:CQ$.

Ce qui montre que la droite CQ comprise entre le centre G & la rencontre Q du diamètre CD par la tangente HQ est troisième proportionnelle à l'abscisse CK de l'ordonnée menée du point touchant H au diamètre CD & au même demi-diamètre.

COROLLAIRE II.

216. Puisque par le corollaire précédent $CK:CD::CD:CQ$ on a aussi $CD:CQ::CK:CD$ & à cause des parallèles GK DH

$$CK:CD::CG:CH \text{ \& par la pré-}$$

sente proposition.

$$CG:CH::CH:CS,$$

on aura donc $CD:CQ::CH:CS$. D'où il suit que les triangles CDS CHQ , sont égaux, puisqu'ils

puisque'ils ont un angle égal entre les côtés réciproques, CD CS , CQ CH , & que les droites DH QS sont parallèles.

COROLLAIRE III.

217. Puisque $CG:CH::CH:CS$: on aura
componendo $CG+CH:CG::CH+CS:CH$ &
alternando $CG+CH:CH+CS::CG:CH$ de
 même *divid.* $CH-CG:CH::CS-CH:CH$ &
alternando $CH-CG:CS-CH::CG:CH$
 Donc $CG+CH:CH+CS::CH-CG:CS-CH$
 & réduisant $RG:RS::GH:SH$; ce qui montre que la ligne RS est coupée en proportion harmonique aux points G H , on feroit voir de même que $FK:FQ::DK:DQ$, d'où il suit qu'en général les propriétés des diamètres par rapport à leurs ordonnées, à leurs paramètres & à leurs tangentes & sou-tangentes sont précisément les mêmes que celles des axes par rapport aux mêmes lignes.

R E M A R Q U E.

On fait usage de cette proposition pour mener une ou deux tangentes à l'ellipse d'un point Q donné sur le même plan hors de cette courbe comme on va voir dans le problème suivant.

PROPOSITION XXXV.

P R O B L É M E III.

218. Une ellipse $AFBD$ (Fig. 57), son centre C , & un point Q sur le même plan étant donnés hors de cette courbe, mener de ce point deux tangentes à l'ellipse.

K

SOLUTION

Par le centre C & le point Q , je mene un diametre QCF , sur le diametre FD je décris un demi cercle FPD , sur la partie CQ , je décris de même un autre demi cercle CPQ , qui coupe le premier au point P , duquel j'abaisse la perpendiculaire PK sur le diametre FD , & je mene aux points QC les droites PQ & PC . Il est clair que la droite PQ sera tangente au cercle FPD au point P , puisque l'angle CPQ est, *par construction*, appuyé sur le diametre CQ . donc à cause de la perpendiculaire PK ordonnée au diametre FD , du cercle FPD on aura $CK:CD :: CD:DQ$, & partant le point K est celui par lequel on doit mener l'ordonnée dont les extrémités détermineront les points de contingence demandés. Il ne s'agit que de trouver l'angle CKH que que doit faire une ordonnée de l'ellipse au diametre FD , avec cẽ même diametre. On le trouvera de cette maniere. Par un point A pris à volonté sur la circonférence de l'ellipse & le point F origine du diametre FD , on menera une droite indéfinie AFG , sur laquelle on prendra une partie $FG=AF$ par le point G , on menera la droite GB parallèle au diametre FD qui rencontrera l'ellipse dans un point B , par lequel & par le point A on tirera la droite AB qui sera ordonnée au diametre FD qui la divise en deux également en E , comme il est évident à cause des triangles

AEF ABG qui sont semblables, puisque la droite **BG** est, *par construction*, parallèle à **FD**, & qui donnent $AF:AG::AE:AB$. Mais **AF** n'est que la moitié de **AG**, donc **AE** n'est aussi que la moitié de **AB**. L'angle des ordonnées étant ainsi trouvé, par le point **K** du diamètre **FD**, on menera la droite **HKh**, parallèle à **AB**; par les points **H h** & le point **Q** on menera les droites **QH Qh**, qui seront tangentes dans ces points; puisque, *par construction*, la sou-tangente **CQ** est troisième proportionnelle à l'abscisse **CK** & au diamètre **CD**, & que d'ailleurs ces lignes se terminent aux extrémités de la double ordonnée **Hh** qui passe par le point **K**. *Ce qu'il falloit trouver & démontrer.*

COROLLAIRE.

219. Il suit de cette construction que si l'on décrit un demi-cercle, & une ellipse sur un même diamètre **FD**, & que par un point **K** pris sur un diamètre commun au cercle & à l'ellipse, on mene une ordonnée au même cercle & une autre à l'ellipse; les tangentes de ces deux courbes, qui passeront par les extrémités de ces ordonnées, se réuniront dans un même point, sur le prolongement du diamètre commun. De plus si l'on décrit une infinité d'ellipses différentes sur un même diamètre, & que par un point **K** on mene à toutes ces ellipses des ordonnées correspondantes; toutes les lignes tangentes aux extrémités de ces or-

données se réuniront au même point sur le diamètre commun prolongé autant qu'il sera nécessaire.

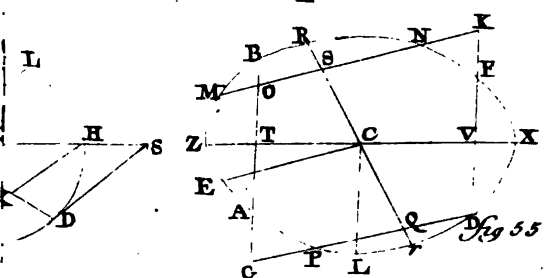
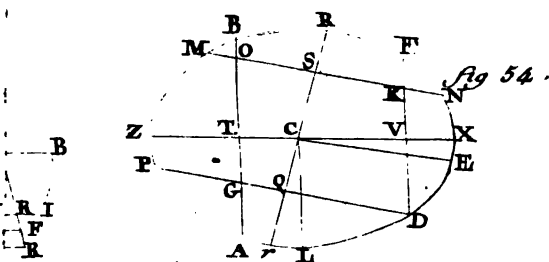
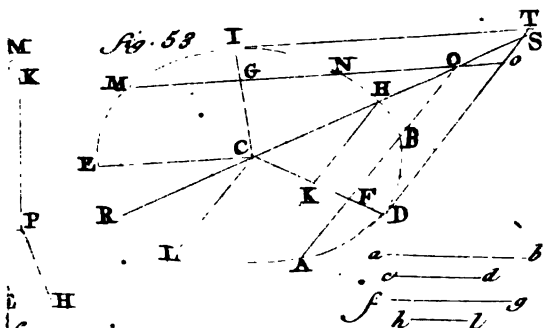
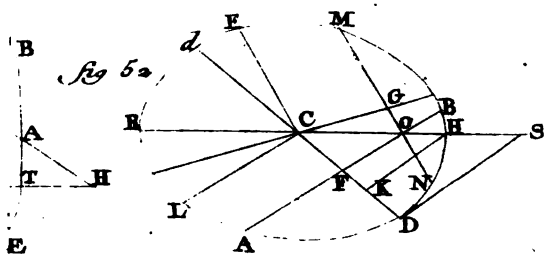
PROPOSITION XXXVI.

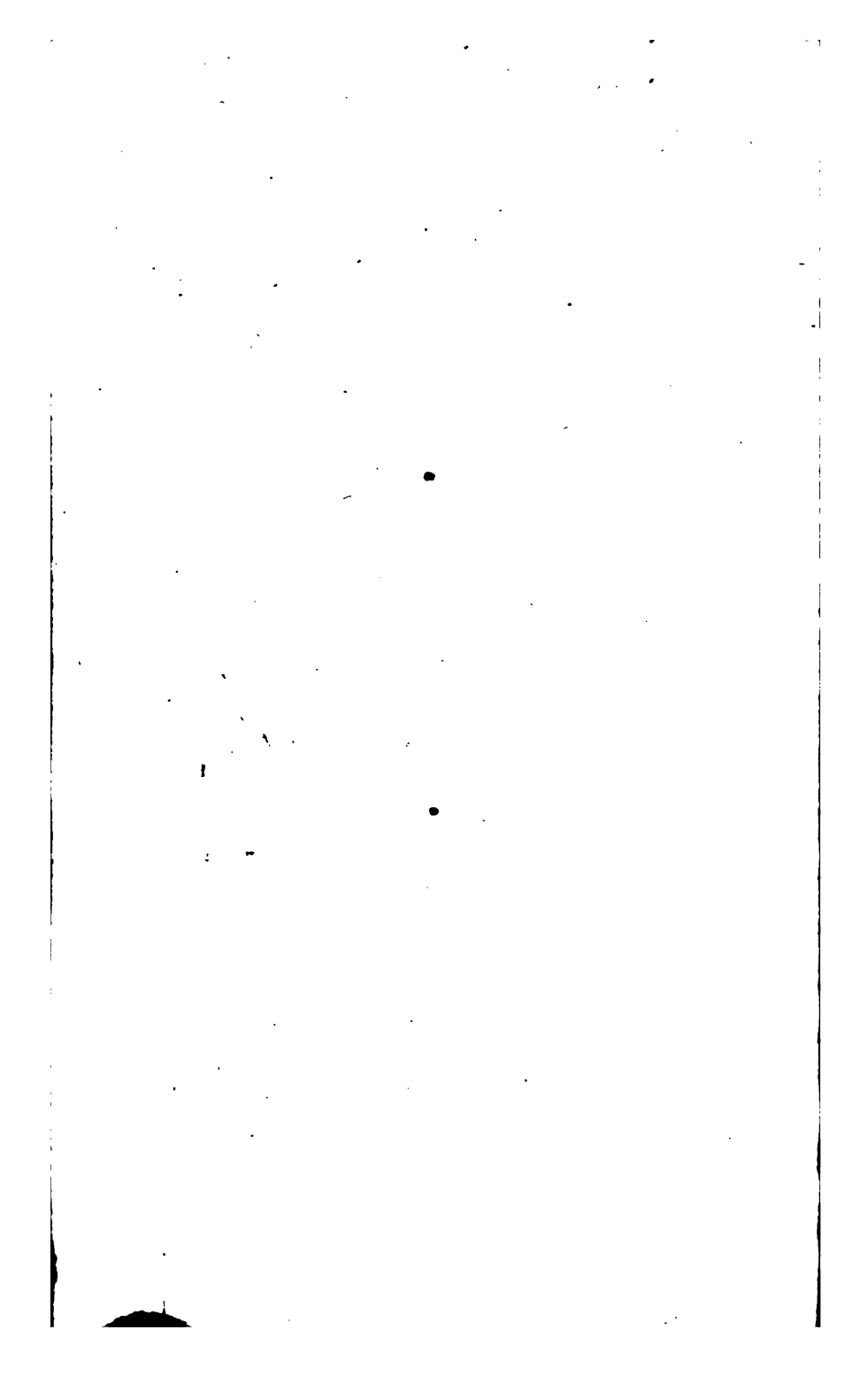
THÉORÈME.

220, Un parallélogramme $CMmH$ (Fig. 56) fait sur deux demi-diamètres conjugués CM CH , est égal à un parallélogramme $CLID$ fait sur deux autres demi-diamètres conjugués CL CD .

DÉMONSTRATION.

Soient prolongés les diamètres CD CH , jusqu'à ce qu'ils rencontrent les tangentes HQ DS aux points S Q , soient achevés les parallélogrammes $CDSs$ $CHQq$, sur les diamètres CD CH , & leurs tangentes DS QH , par le point L soit mené la tangente Ll , parallèle à CD , terminée en l à la tangente DS , & par le point M la tangente Mm parallèle au diamètre CH , & terminée en m à la tangente HQ . Par la proposition 3^{ème} on aura $DS^2 : CS^2 - CH^2 :: CL^2 : CH^2$, & partant $DS^2 = \frac{(CS^2 - CH^2)}{CH^2} \times CL^2$. Par la même proposition, on aura encore $QH^2 : CQ^2 - CD^2 :: CM^2 : CD^2$, & partant $QH^2 = \frac{(CQ^2 - CD^2)}{CD^2} \times CM^2$, & à cause des droites DH QS qui sont parallèles (num. 215). on a $CQ^2 : CD^2 :: CS^2 : CH^2$. Donc dividen. $CQ^2 - CD^2 : CD^2 :: CS^2 - CH^2 : CH^2$, ou, ce qui revient au même, $\frac{CQ^2 - CD^2}{CD^2} = \frac{CS^2 - CH^2}{CH^2}$. Si l'on fait une proportion avec les quarrés DS^2 QH^2 , & leurs valeurs, on aura





$DS^2:QH^2::\frac{(CS_2-CH_2)}{CH^2}\times CL^2::\frac{CQ_2-CP_2}{CD^2}\times CM^2::$
 $CL^2:CM^2$, en divisant par les rapports égaux
 qui multiplient CL^2 & CM^2 . Donc en tirant
 les racines $DS:QH::CL:CM::Dl:Hm$.
 Car à cause des parallélogrammes $DL HM$,
 $Dl=CL$ & $CM=Hm$. Donc *alternando*
 $DS:Dl::QH:Hm$.

Cela posé les parallélogrammes $CHmH$ $CHQq$
 étant compris entre les parallèles QH qC , on
 aura $CHQq:CHmM::QH:Hm$ & nous avons
 $QH:Hm::DS:Dl$ &

à cause des parallélogrammes $CDlL$ $CDSs$
 $DS:Dl::CDSs:CDlL$.

Donc $CHQq:CHmM::CDSs:CDlL$.

Mais (num. 216) $CQH=CDS$. Donc

$CHQq=CDSs$, puisque les parallélogram-
 mes sont doubles de triangles égaux. Donc
 aussi $CHmM=CDlL$; C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

221. Puisqu'un parallélogramme fait sur
 deux demi-diametres conjugués, est égal à
 un autre parallélogramme fait sur deux autres
 demi-diametres conjugués, les parallélogram-
 mes faits sur les diametres entiers, seront aussi
 égaux entr'eux puisqu'ils sont quadruples des
 premiers. D'où il suit que tous les parallélo-
 grammes circonscripts à l'ellipse, & formés
 sur deux diametres conjugués, sont égaux en-
 tr'eux & au rectangle des deux axes.

COROLLAIRE II.

222. Puisque par la proposition & le corol-

laire précédent, un parallélogramme $LCDH$ (Fig. 58), formé sur deux demi-diamètres conjugués quelconques CD CL , est égal au rectangle des deux demi-axes CA CB de la même ellipse; si par le point L , extrémité du diamètre CL on abaisse la droite LF perpendiculaire à son conjugué CD , on aura $CD \times FL = CA \times CB$, car puisque le premier parallélogramme est oblique, il est égal au produit de sa base CD par sa hauteur LF , d'où l'on tire $CD : CA : CB : FL$.

PROPOSITION XXXVII.

THÉORÈME.

223. Soit une ellipse PTB dont CT CB (fig. 59) sont les deux demi-axes, & CP CQ deux demi-diamètres conjugués l'un à l'autre, si des points P Q extrémités de ces diamètres, on mène les ordonnées à l'axe PO QR , je dis que la somme des carrés des abscisses CO CR est égal au carré du demi-axe CT auquel on a mené ces ordonnées. C'est-à-dire que l'on aura toujours $CO^2 + CR^2 = CT^2$.

DÉMONSTRATION.

Du point P origine du diamètre CP , soit menée la tangente PH , parallèle à son conjugué CQ , jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe en H , puisque les droites PO QR sont ordonnées à l'axe CT , on aura $PO^2 : QR^2 :: CT^2 - CO^2 : CT^2 - CR^2$, & à cau-

se des triangles semblables POH QRC , QR^2 :
 $PO^2 :: CR^2 : OH^2$. donc en multipliant par ordre
 on aura

$$PO^2 \times QR^2 : PO^2 \times QR^2 :: (CT^2 - CO^2) \times CR^2 : (CT^2 - CR^2) \times OH^2$$

Mais les deux premiers termes de cette proportion sont égaux, donc les deux derniers le sont aussi ; ce qui donne cette égalité

$$CT^2 \times CR^2 - CO^2 \times CR^2 = CT^2 \times OH^2 - CR^2 \times OH^2.$$

D'où l'on déduit $CR^2 = \frac{CT^2 \times OH^2}{CT^2 - CO^2 + OH^2}$. Mais (N^o

163) $OH = \frac{CT^2 - CO^2}{CO}$ Donc

$$OH = \frac{(CT^2 - CO^2) \times (CT^2 - CO^2)}{CO^2}$$

mettant cette valeur de OH dans celle de CR^2 , il viendra

$$CR^2 = \frac{CT^2 \times (CT^2 - CO^2) \times (CT^2 - CO^2)}{CO^2 \times (CT^2 - CO^2) \times (CT^2 - CO^2) + (CT^2 - CO^2) \times (CT^2 - PO^2)}$$

ou en divisant le numérateur & le dénominateur par $CT^2 - CO^2$ & multipliant l'un & l'autre par CO^2 .

$$CR^2 = \frac{CT^2 \times (CT^2 - CO^2)}{CO^2 + CT^2 - CO^2} = \frac{CT^2 \times (CT^2 - CO^2)}{CT^2} = CT^2 - CO^2$$

& faisant passer CO^2 dans le premier membre,
 $CR^2 + CO^2 = CT^2$. C. Q. F. D.

R E M A R Q U E.

Cette proposition est générale, c'est-à-dire, que si des extrémités de deux demi-diamètres conjugués quelconques CP CQ , on mène des ordonnées PO QR à un diamètre quelconque CT , on aura toujours $CR^2 + CO^2 = CT^2$. Car les triangles POH , & QRC seront toujours semblables, & comme les propriétés des sous-tangentes prises sur un diamètre quelconque sont les mêmes que celle de l'axe, on aura encore $OH = \frac{CT^2 - CO^2}{CO}$.

Kiv

COROLLAIRE. I.

223. Si des points PQ , on abaisse les ordonnées $PM QN$, perpendiculaires au petit axe, on aura $CM^2 + CN^2 = CB^2$. Mais à cause des parallélogrammes $OM RN$, $CM = PO$ & $CN = QR$.

Donc $CM^2 + CN^2 = PO^2 + QR^2 = CB^2$.

C'est-à-dire que si des extrémités PQ de deux diamètres conjugués, on mène les ordonnées $PO QR$ au grand axe la somme des carrés de ces ordonnées sera égale au carré du second axe. Ce corollaire est encore vrai, si l'on suppose que l'axe CT soit un diamètre auquel on ait mené des ordonnées $PO QR$ parallèles à son conjugué. Dans la présente proposition au lieu des abscisses $CO CR$ on auroit pu prendre leurs parallèles $PM QN$ qui leur sont égales, d'où l'on déduit cette propriété générale de l'ellipse. Si des extrémités de deux diamètres quelconques, conjugués l'un à l'autre, on mène des ordonnées à un troisième diamètre qui passe entre les deux premiers la somme des carrés de ces ordonnées sera égale au carré du demi-diamètre parallèle à ces ordonnées, & conjugué à ce troisième diamètre.

COROLLAIRE. II.

224. Il suit encore de cette proposition que la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques, est égale à celle des carrés des deux axes, ou de deux autres diamètres

conjugués l'un à l'autre. Car on a par la proposition présent, $CT^2 = CO^2 + CR^2$, & $CB^2 = PO^2 + QR^2$.
Donc $CT^2 + CB^2 = CO^2 + PO^2 + CR^2 + QR^2$,
en ajoutant ces deux équations, mais à cause du triangle rectangl^e COP , $CO^2 + PO^2 = CP^2$,
& à cause du triangle rectangl^e CQR , $CR^2 + QR^2 = CQ^2$. Donc $CT^2 + CB^2 = CP^2 + CQ^2$
& comme les quarrés des diametres sont quadruples de ceux des demi-diametres, on en conclura que la somme des quarrés de deux diametres conjugués, est égale à celles des quarrés des deux axes.

COROLLAIRE III,

225. Supposant toujours que CT est un diamètre quelconque différent de l'axe, & que CB lui est conjugué, il suit de la proposition présente que l'on aura toujours $CO \times PO = CR \times QR$ c'est-à-dire que, si des extremités de deux diametres conjugus CP CQ , on mene à un diamètre quelconque CT des ordonnées PO QR , le produit d'une ordonnée, par son abscisse sera égal au produit d'une autre ordonnée par son abscisse, ou, ce qui revient au même, que ces ordonnées seront entr'elles réciproquement comme leurs abscisses. Car puisque, par la proposition présente, on a $CT^2 = CO^2 + CR^2$, on aura $CT^2 - CO^2 = CR^2$. Et parce que les droites PO PQ , sont ordonnées à un même diamètre CT , on aura $PO^2 : QR^2 :: CT^2 - CO^2 : CT^2 - CR^2 = CT^2 - CT^2 + CO^2 = CO^2$, en mettant $CT^2 - CO^2$.

à la place de CR^2 . D'où il vient

$PO^2 : QR^2 :: CT^2 - CO^2 : CO^2$. Donc en prenant le produit des extrêmes & des moyens $PO^2 \times CO^2 = QR^2 \times (CT^2 - CO^2) = QR^2 \times CR^2$. Puisque $CT^2 - CO^2 = CR^2$, comme on vient de le voir. Donc en tirant les racines $PO \times CO = QR \times CR$, qui est précisément ce que l'on avoit annoncé, puisque de cette égalité on peut déduire cette proportion $PO : QR :: CR : CO$.

Les triangles COP CRQ seront toujours égaux, soit que les diamètres conjugués soient égaux, soit qu'ils soient inégaux. Car ces triangles auront toujours un angle égal, ou des angles suppléments l'un de l'autre compris entre côtés réciproques.

PROPOSITION XXXVIII.

THÉORÈME.

226. Si par l'extrémité P d'un diamètre CP on mène une tangente hPH terminée en H & h , aux prolongements de deux diamètres conjugués CT Cb , en supposant le demi diamètre CQ parallèle à la tangente en P ; je dis que l'on aura $PH \times Ph = CQ^2$. C'est-à-dire que le rectangle des parties d'une tangente terminée à deux diamètres conjugués, prise depuis le point touchant; est égal au carré du demi diamètre parallèle à cette tangente, ou, si l'on veut, au carré du demi diamètre conjugué à celui par l'extrémité duquel on a mené la tangente. (Fig. 59.)

DÉMONSTRATION.

Du point P extrémité du diamètre CP , soient menées les droites $PM PO$ ordonnées aux diamètres conjugués $CT Cb$, & du point Q extrémité du diamètre CQ parallèle à la tangente en P , l'ordonnée QR au diamètre CT , les triangles $POH QRC hMP$ seront évidemment semblables, puisque les droites $PO QR PH QC$ sont parallèles, par construction, & donneront.

$(PH:OH::CQ:CR)$ donc en multi. par ord. & $(Ph:PM::CQ:CR)$ mettant CO à la place de PM qui lui est égal, on aura

$$PH \times Ph \cdot OH \times CO :: CQ^2 : CR^2 = CT^2 - CO^2.$$

par l'article 225 & à cause de la tangente PH on a $OH = \frac{CT^2 - CO^2}{CO}$ donc $OH \times CO = CT^2 - CO^2$,

d'où il suit évidemment que $PH \times Ph = CQ^2$.

Car la proportion se change en celle-ci

$$PH \times Ph : CT^2 - CO^2 :: CQ^2 : CT^2 - CO^2.$$

C. Q. F. D.

Cette proposition est d'un grand secours pour la solution de plusieurs problèmes curieux sur la description des sections coniques. On en va voir une application dans le problème suivant.

PROPOSITION XXXIX.

PROBLÈME IV.

227. Deux lignes $CP CQ$ étant données de grandeur & de position pour deux demi diamètres conjugués d'une ellipse; il faut en trouver les deux axes (Fig. 60).

SOLUTION.

On fera d'abord cette proportion $CP : CQ :: CQ : PS$ par le point P on mènra la droite PH parallèle à CQ & au point F milieu de CS , on élèvera la perpendiculaire FD qui rencontrera PH dans un point D . De ce point comme centre avec le rayon DC , on décrira un cercle qui coupera la ligne Ph dans les points déterminés H & h . De ces points on mènra au centre C les droites CH Ch , qui se couperont à angles droits & sur lesquels doivent se trouver les axes demandés. Pour les déterminer, du point P on abaissera les perpendiculaires PO PM , qui seront ordonnées à ces axes, & l'on aura le premier en cherchant une ligne CT moyenne proportionnelle entre CO & CH , & le second en cherchant pareillement une moyenne CB entre CM & Ch .

DÉMONSTRATION.

Puisque la droite PH est parallèle au diamètre CQ , elle est tangente en P . D'ailleurs cette droite hPH étant comprise dans le cercle dont elle est un diamètre, à cause de la sécante CS on aura $Ph \times PH = CP \times PS$. Mais par construction nous avons $CP : CQ :: CQ : PS$. Donc $CP \times PS$ ou $PH \times Ph = CQ^2$. Ce qui fait voir que cette tangente est terminée de part & d'autre par le prolongement de deux diamètres conjugués. Et comme il n'y a que

Les axes qui se coupent à angles droits dans l'ellipse, il faut aussi que ces axes se trouvent sur les droites CH & Ch , puisque l'angle C est droit étant appuyé sur le diamètre. Enfin, puisque CT est moyenne proportionnelle entre CO & CH , on aura $CO:CT::CT:CH$, ce qui montre que le point T est l'origine de l'axe. Ainsi cette construction fait trouver tout ce que l'on demandoit.

REMARQUE.

On pourroit aussi par le moyen de la même proposition, trouver deux diamètres qui fissent entr'eux un angle égal à un angle donné, étant données deux lignes droites CP CQ pour deux demi-diamètres conjugués déterminés de grandeur & de position. La droite CS seroit toujours la même ; mais la droite hH deviendrait en ce cas la corde de l'angle que doivent faire entr'eux les deux diamètres conjugués que l'on demande. Ceux qui savent tant soit peu l'application de l'algèbre à la géométrie, pourront s'exercer à trouver la solution de ce Problème que l'on trouvera du second degré.

PROPOSITION XL.

THÉORÈME.

227. Soit une ellipse $aBab$ (Fig. 61), dont aA bB sont deux diamètres conjugués ; si l'on décrit un demi-cercle $aMmA$ sur l'un de ces diamètres, & si par un point P quelconque, du diamètre sur lequel on a décrit le demi-cercle, on

mène une ordonnée PM au cercle, & une autre ordonnée PN à l'ellipse, parallèle au diamètre conjugué Bb , je dis que l'ordonnée à l'ellipse sera toujours à son ordonnée correspondante au cercle, comme le demi-diamètre CB est au demi-diamètre CA , sur lequel le cercle a été décrit.

DÉMONSTRATION.

Puisque la droite PN est ordonnée au diamètre CA de l'ellipse CA , par la prop. 27^{me}, on aura $PN^2 : aP \times PA :: CB^2 : CA^2$, & puisque PM est ordonnée au cercle, on aura $PM^2 = aP \times PA$. Donc en substituant cette expression à la place du rectangle $aP \times PA$, on aura $PN^2 : PM^2 :: CB^2 : CA^2$, & tirant les racines de chaque terme

$$PN : PM :: CB : CA. \quad C. Q. F. D.$$

COROLLAIRE.

228. Si les deux diamètres de l'ellipse conjugués l'un à l'autre sont égaux entr'eux, les ordonnées de l'ellipse, seront égales aux ordonnées correspondantes dans le cercle, d'où il suit que pour qu'une figure soit un cercle, il ne suffit pas que les carrés des ordonnées soient égaux aux carrés des abscisses, mais il faut encore que ces ordonnées fassent angle droit avec leur diamètre. On tire de cette proposition une méthode fort simple de décrire une ellipse, dont les diamètres conjugués sont égaux & font entr'eux un angle déterminé, comme on verra dans la description des Sections Coniques.

OBSERVATION.

Nous avons considéré jusqu'ici l'ellipse, indépendamment des rapports qu'elle peut avoir avec le cercle, & la plupart des démonstrations que nous avons données, étoient appuyés sur les propriétés de cette courbe considérée dans elle même. De ces propriétés démontrées généralement, nous avons déduites celles du cercle par des corollaires & des suites immédiates de ces propositions. Peut-être cette méthode paroîtra-t-elle un peu difficile & recherchée, d'autant que l'on auroit pu démontrer toutes ces propriétés d'une manière plus courte, en considérant l'ellipse comme un cercle dont les ordonnées ont été allongées ou accourcies proportionnellement, comme a fait Grégoire de St. Vincent dans son traité des Sections Coniques. Deux raisons m'ont engagé à suivre une route différente : quoiqu'un peu plus difficile. La première, c'est qu'ayant résolu de donner en entier dans cet ouvrage, le petit traité des sections coniques de M. de la Hire ; il étoit plus naturel de donner les démonstrations générales des propositions précédentes, en se servant des mêmes principes, que d'employer une autre méthode qui n'auroit eu aucune liaison avec la première. La seconde, & qui peut être la plus forte, est qu'en fait de géométrie, il faut donner les démonstrations les plus générales qu'il est possible. Or on ne peut disconvenir que l'ellipse ne soit une courbe plus générale que le cercle qu'elle renferme dans ses différentes espèces. On peut déduire le cercle de l'ellipse en simplifiant les rapports d'où l'on tire son équation, & l'on ne peut pas de même déduire

l'ellipse du cercle. Je ne suis pas assez téméraire pour blâmer en aucune manière, ceux qui ont suivi la méthode inverse, & peut être doit-elle être préférée, puisqu'elle est la plus proportionnée à la méthode de doctrine, qui procède toujours du plus simple au plus composé, & que d'ailleurs dans un traité synthétique, on est absolument obligé de considérer le rapport de l'ellipse au cercle pour estimer sa surface avec précision & pour toiser les solides formés par la révolution des ellipses, des segments ou secteurs elliptiques, autour d'un axe de mouvement. Comme cette partie n'a pas été traitée dans le livre des éléments de M. de la Hire, j'ai crû que tout le monde la verroit ici avec plaisir, & qu'il n'y auroit aucun inconvénient à suivre une route un peu différente de celle que j'ai tenue dans les propositions précédentes, en commençant toujours par les propositions qui me paroîtront les plus générales, quoique cette méthode ait quelque chose de moins universel que la précédente.

PROPOSITION XLI.

THÉORÈME.

229. La surface d'une ellipse $aBAb$, dont aA Bb sont deux diamètres conjugués, est à la surface d'un cercle décrit sur l'un de ces diamètres, comme le parallélogramme formé sur les deux diamètres, est au carré du diamètre sur lequel ce cercle a été décrit. (Figure 61).

DÉMONSTRATION.

Par le point A extrémité du diamètre Aa ,
soit

soit menée la ligne AD , parallèle au diamètre conjugué Bb , & tangente à l'ellipse en ce point, du centre C & rayon CA soit décrit un cercle $AmMa$, & du même centre soit abaissée la droite CD perpendiculaire sur la tangente AD , enfin par deux points infiniment proches Pp , soient menées les ordonnées $PNnp$, dans l'ellipse, & les ordonnées $PMpm$ dans le cercle. Cela posé, puisque ces ordonnées que j'appellerai ordonnées correspondantes, sont infiniment proches, on pourra regarder les petits trapèzes $PNnp$ & $PMmp$, comme des parallélogrammes puisque les triangles Non & Mom qu'il faudroit retrancher ou ajouter pour les rendre de vrais parallélogrammes, sont infiniment petits, par rapport à ces trapèzes, & partant de nulle considération. De plus on imaginera que la surface de l'ellipse est composée d'une infinité de petits parallélogrammes ou trapèzes $NPpn$, & le cercle d'une infinité de petits rectangles $MPpm$ tous posés à côtés les uns des autres. Nous nommerons les premiers *éléments elliptiques*, & les seconds *éléments circulaires*: & les deux ensemble *éléments correspondants*. Comme les ordonnées $MPmp$ du cercle sont perpendiculaires au demi-diamètre CA , le petit rectangle $MPpm$, est égal au produit de sa base Pp , par sa hauteur PM , & l'on aura $PMmp = PM \times pP$; mais il n'en est pas de même de l'élément elliptique correspondant $npPN$; comme les ordonnées PN, pn sont inclinées au diamètre CA , pour avoir la surface de l'élément $PNnp$,

il faudra multiplier la base PN par la partie Ll de la droite CD perpendiculaire à la tangente AD , car cette ligne sera aussi perpendiculaire aux ordonnées $PNpn$ parallèles à cette tangente. Ainsi l'on aura $NPpn = PN \times Ll$, faisant donc une proportion avec ces élémens, & les produits qui leurs sont égaux, on aura

$$NPpn : MPpm :: PN \times Ll : PM \times Pp.$$

Mais à cause des parallèles $PLplAD$, qui coupent les côtés $CA CD$ en parties proportionnelles, on a

$$Ll : Pp :: CD : CA, \text{ \& par la proposition 40.}$$

$$PN : PM :: CB : CA, \text{ donc en multipliant par ordre}$$

$$PN \times Ll : PM \times Pp :: CD \times CB : CA^2 \text{ donc on aura}$$

$$NPpn : MPpm :: CD \times CB : CA^2, \text{ c'est-à-}$$

dire que l'élément elliptique est à l'élément circulaire, comme le rectangle $CD \times CB$ est au

quarré du demi-diametre CA . On démontrera

la même chose de tous les élémens correspon-

dants de l'ellipse & du cercle, & partant, la somme

des élémens elliptiques, ou la surface de l'ellipse,

est à la somme des éléments circulaires ou à la surface

du cercle; comme un élément elliptique, est à l'élé-

ment circulaire correspondant, ou comme le rectangle

$CD \times CB$ est au quarré du demi-diametre CA :

mais le rectangle $CD \times CB$ est égal au parallé-

logramme formé sur les deux demi-diametres

conjuguez, donc en désignant la surface de l'el-

lipse par $S_{\text{ellip.}}$ & celle du cercle par $S_{\text{cir.}}$

on aura

$$S_{\text{Ellip.}} : S_{\text{cir.}} :: CB \times CD : CA^2 :: 4CB \times CD : 4CA^2$$

C'est-à-dire que la surface de l'ellipse, est à la

Surface du cercle décrit sur un de ses diametres, comme le parallélogramme formé sur ce diametre & son conjugué, est au quarré de ce diametre. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

230. Le parallélogramme formé sur les deux demi-diametres conjugués CA CB , ou le rectangle $CB \times CD$ est aussi égal au rectangle $CA \times BF$, en supposant la ligne BF abaissée perpendiculairement de l'extrémité B du demi-diametre CB sur son conjugué, donc en mettant $CA \times BF$ dans la dernière proportion de la proposition précédente, on aura
 $S_{\text{ellip.}} : S_{\text{cir.}} :: CA \times BF : CA^2 :: BF : CA$,
 en divisant les deux termes du second rapport par CA . D'où il suit que la surface de l'ellipse, est à la surface d'un cercle décrit sur un diametre quelconque de cette courbe; comme la perpendiculaire abaissée de l'extrémité du diametre CB conjugué à celui sur lequel on a décrit le cercle, est au demi-diametre CA rayon du même cercle.

COROLLAIRE II.

231. Si l'on prend une droite RS moyenne proportionnelle entre le demi-diametre CA & la droite BF abaissée de l'extrémité de son conjugué perpendiculairement sur lui même, la surface du cercle décrit du rayon RS sera égal à la surface de l'ellipse. Car puisque par hypothese on a $CA : RS :: RS : BF$, on aura aussi
 $CA^2 : RS^2 :: CA : BF$, donc *permutando*

Lij

$RS^2 : CA^2 :: BF : CA$ mais par le corollaire précédent $BF : CA :: S. ellip. : S. cir.$

donc $RS^2 : CA^2 :: S. ellip. : S. cir.$

& prenant les cercles décrits sur les rayons RS CA qui sont proportionels aux quarrés de ces lignes, on aura en les désignant ainsi *cer.* CA pour dire le cercle fait sur CA ,

cer. $RS : \text{cer. } S. CA :: S. ellip. S. cir.$

d'ailleurs la surface circulaire à laquelle nous comparons l'ellipse est celle d'un cercle qui a CA pour rayon, puisqu'on a supposé le cercle décrit sur CA , on aura donc le cercle fait sur RS égal à la surface de l'ellipse, puisque les conséquents de la dernière proportion sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

232. Si les diametres CA CB sont perpendiculaires l'un à l'autre, la perpendiculaire BF se confondra avec le diametre CB , les lignes aA Bb deviendront les axes de l'ellipse & la proportion de l'article précédent deviendra celle-ci : $S. ellip. S. cir. :: BC : CA$, c'est - à - dire que la surface de l'ellipse, est à celle d'un cercle décrit sur son grand ou sur son petit axe, comme le petit axe est au grand axe, ou comme le grand axe est au petit axe. D'où il suit encore que la surface de l'ellipse est égale à celle d'un cercle dont le rayon seroit moyen proportionel entre les deux axes de l'ellipse. Ce corollaire est de la dernière importance dans le toisé des surfaces elliptiques, car on ne cherche presque jamais cette surface

par les diamètres conjugués, mais bien par les axes que l'on regarde toujours comme les lignes les plus intéressantes, & que l'on détermine préféablement à tout autre diamètre, à moins que l'on ait deux diamètres déjà donnés de grandeur & de positions.

COROLLAIRE IV.

233. Supposant toujours l'ellipse dont CA & CB sont deux demi-diamètres conjugués, avec le cercle décrit du rayon CA , Fig. 72. si par un point P quelconque du diamètre CA , on mène une double ordonnée NPn dans l'ellipse & par le même point sa correspondante MPm dans le cercle, le segment elliptique $NA n$ sera au segment circulaire $MP m$, comme BF est à CA ; c'est-à-dire comme la perpendiculaire abaissée de l'extrémité B du demi-diamètre CB , sur son conjugué CA , est à ce demi-diamètre CA ; car on démontrera de même que dans la proposition présente & le premier corollaire, que tous les éléments du secteur elliptique, sont aux éléments circulaires correspondants; comme le parallélogramme sur $BC CA$ est au carré de CA , ou comme BF à CA .

COROLLAIRE V.

234. Si du centre C (fig. 62.) on mène aux extrémités des doubles ordonnées $Mm Nn$ les droites $CM Cm$, $CN Cn$, il sera facile de démontrer que le triangle $CN n$, est au triangle $CM m$, comme BF à CA , ou que

$CNn : CMm :: BF : CA$, d'ailleurs nous avons par le précédent corollaire

$$NAn : MA m :: BF : CA$$

donc $CNn : NAn :: CMm : MA m$

donc en composant & alternant

$$CNn + NAn : CMm + MA m :: CNn : CMm :: BF : CA$$

C'est-à-dire que la surface d'un secteur elliptique, est à celle du secteur circulaire correspondant, comme la droite BF (déterminée comme nous le supposons) est au demi-diamètre CA .

COROLLAIRE VI.

235. Il suit encore de cette proposition que la surface d'un ellipse dont $Aa b B$, sont deux diamètres conjugués (fig. 63) est égale à celle d'une autre ellipse qui auroit pour axe une droite Dd comprise entre les tangentes $BD b d$ parallèles au diamètre Aa , menées par les extrémités du diamètre Bb ; car la surface de l'ellipse qui a les droites $Aa Dd$ pour axe, est à la surface du cercle décrit sur Aa ; comme DC est à CA , & de même la surface de l'ellipse dont Aa & bB sont les diamètres conjugués, est à la surface du cercle sur Aa ; comme BF ou DC qui lui est égal, est à CA : donc ces deux surfaces elliptiques, ont un même rapport avec la surface du cercle décrit sur CA , donc elles sont égales entr'elles. On peut encore démontrer ce corollaire d'une autre manière comme il suit.

Puisque ces deux ellipses $a BAb, a DAd$, fig. 63. sont comprises entre mêmes parallèles, il y a

même nombre d'éléments dans l'une & dans l'autre. Il est évident de plus, que la ligne BF ou D C'est celle qui doit mesurer le nombre des éléments, ainsi il n'y a qu'à faire voir que les éléments de l'une sont égaux aux éléments correspondants de l'autre. Par un point P soit menée l'ordonnée PN , & sur le prolongement de la même ligne l'ordonnée pn . Dans l'ellipse $aBAb$, on aura $PN^2 : CB^2 - CP^2 :: CA^2 : CB^2$, donc $PN^2 = \frac{CB^2 - CP^2}{CB^2} \times CA^2$ de même dans l'ellipse $aDAd$, on aura $pn^2 : CD^2 - CP^2 :: CA^2 : CD^2$, donc $pn^2 = \frac{CD^2 - CP^2}{CD^2} \times CA^2$.

Mais à cause des triangles semblables CBD, CPp on a $CB:CP::CD:Cp$, donc $CB^2:CP^2::CD^2:Cp^2$, & *dividendo* $CB^2 - CP^2 : CB^2 :: CD^2 - Cp^2 : CD^2$, ou $\frac{CB^2 - CP^2}{CB^2} = \frac{CD^2 - Cp^2}{CD^2}$, d'où il suit que les ordonnées correspondantes PN, pn sont égales; puisque les quantités qui multiplient CA le sont entr'elles. Donc ces deux ellipses sont aussi égales.

R E M A R Q U E.

Ce corollaire est encore vrai dans le cas où les deux ellipses qui ont un diamètre commun, auroient aussi des diamètres $Bb Dd$ inégalement inclinés, mais compris entre les parallèles $BD bd$, & c'est une propriété générale & commune à toutes les sections coniques.

PROPOSITION XLII.

P R O B L É M E.

236. Trouver la surface d'une ellipse dont Aa

B b sont deux diametres déterminés de grandeur & de position.

SOLUTION.

On cherchera d'abord la surface d'un cercle qui auroit un rayon égal à CA , en se servant du rapport de Metius pour déterminer la circonférence de ce cercle, qui est à peu près 355 lorsque le diametre est exprimé par 113 on dira donc $113 : 355 :: CA : \frac{355}{113} \times CA$: ce quatrième terme est la demi circonférence du cercle qui auroit CA pour rayon, multipliant cette quantité par le rayon on aura ou la surface de ce cercle $\frac{355}{113} CA^2$. Cette surface ainsi déterminée, on abaissera la droite BF de l'extrémité B du diametre Bb , sur son conjugué aA , & l'on fera $CA : BF :: \frac{355}{113} CA^2 : \frac{355}{113} \frac{CA^2 \times BF}{CA} = \frac{355}{113} CA \times FB$ & le quatrième terme sera la surface de l'ellipse. Si les diametres aA bB sont à angles droits, ou sont les axes de l'ellipse, on aura alors $BF = BC$ & partant la surface de l'ellipse est à peu près les $\frac{355}{113}$ du rectangle des deux demi-axes. Cette solution suit évidemment de tout ce qui précède & n'a pas besoin d'autre démonstration.

PROPOSITION XLIII.

PROBLÈME.

237. Trouver la surface d'un segment elliptique formé par une corde quelconque Nn & une partie du périmètre de l'ellipse. (fig. 62.)

SOLUTION.

Par le centre C de l'ellipse, & le point P milieu de la corde Nn , on mènera un diamètre CPA , auquel on mènera son conjugué Bb puis ayant décrit un cercle sur le premier, par le point P on mènera une corde MPm , qui déterminera le segment circulaire correspondant au segment elliptique donné, dont on cherchera la surface, que nous représenterons par MAm , enfin ayant abaissé la perpendiculaire BF , on fera cette proportion $BF:CA::MAm:\frac{MAm \times CA}{BF}$, & ce dernier terme exprimera la surface du segment elliptique. Si le diamètre CA coupoit la corde Nn perpendiculairement, l'ordonnée Mm qui détermine le segment circulaire correspondant, se confondroit avec la corde Nn , les droites Aa , Bb , seroient les axes de l'ellipse, & l'on auroit la surface de ce segment de la même manière. Ainsi pour trouver l'aire d'un segment elliptique quelconque, il faut chercher d'abord le segment circulaire correspondant, & le multiplier par le rapport du diamètre aA sur lequel on a décrit le cercle, à son conjugué BC .

PROPOSITION XLIV.

PROBLÈME.

238. Trouver la surface d'un secteur elliptique; formé par deux droites CN Cn & une partie NA n du périmètre de l'ellipse. (fig. 62)

SOLUTION.

Par les points Nn , on menera une droite Nn ; par le point P milieu de cette corde & le centre C , on fera passer un diamètre CPA , sur lequel on décrira un cercle MAm : au point P , on élèvera la double ordonnée mPM , & l'on tirera au centre C , les droites $CM Cm$, pour avoir un secteur circulaire correspondant au secteur elliptique proposé. On cherchera d'abord la surface de ce secteur circulaire en multipliant l'arc MAm par la moitié du rayon CA , & ayant mené le demi-diamètre CB parallèle à la corde Nn & conjugué à CA , & abaissé la perpendiculaire BF , on fera cette proportion

$$CA:BF::MAm \times \frac{1}{2}CA:\frac{MAm \times BF \times \frac{1}{2}CA}{CA} \quad \frac{MAm \times BF}{2}$$

d'où il suit que pour trouver la surface d'un secteur elliptique quelconque il faut d'abord déterminer le secteur circulaire correspondant & multiplier l'arc de ce secteur circulaire par la moitié de la droite BF qui sera un des demi axes lorsque le diamètre qui coupe Nn en deux également sera perpendiculaire à cette corde.

PROPOSITION XLV.

PROBLÈME.

239. Une ellipse BAN étant donnée (fig. 62.) dont CA & CB sont deux diamètres conjugués l'un à l'autre, trouver un secteur NCA qui soit

à la surface de l'ellipse dans une raison donnée , ou , si l'on veut , partager l'ellipse , en un certain nombre de parties égales en commençant par une ligne qui va du centre C à un point déterminé A du perimetre de cette courbe.

SOLUTION.

Soit proposé par exemple de trouver un secteur ACN qui soit la huitieme partie de l'ellipse, ou, si l'on veut, de partager l'ellipse en huit parties égales par des lignes menées du centre vers le perimetre, à commencer par la ligne CA ; avec cette ligne comme rayon, on décrira un cercle du centre C , on prendra l'arc AM égal à la huitieme partie de la circonférence, ou, ce qui revient au même, on fera l'angle ACM de 45 degrés, du point M on abaissera l'ordonnée MP perpendiculaire au diametre CA , par le point P ainsi déterminé, on menera la droite PN parallèle au diametre CB , & l'on tirera la droite CN qui donne le secteur demandé égal à la huitieme partie de la surface de l'ellipse. Car puisque l'arc du cercle AM a été fait égal à la huitieme partie de la circonférence, le secteur ACM sera la huitieme partie du cercle, d'ailleurs à cause de l'ordonnée PN menée dans l'ellipse par le même point P que l'ordonnée PM , le secteur elliptique est un secteur correspondant au secteur circulaire ACM :

$$\text{donc } NCA : MCA :: BF : CA \text{ (num 230)}$$

$$BF : CA :: S. \text{ ellip.} : S. \text{ cir.}$$

donc $NCA : MCA :: S. ellip. : S. cir.$ & partant le secteur elliptique est la huitieme partie de la surface de l'ellipse, puisque, par construction, le secteur circulaire est la huitieme partie de la surface du cercle.

DÉFINITION.

240. Deux ellipses sont *semblables*, lorsqu'on peut leur inscrire des figures semblables d'un même nombre de côtés.

PROPOSITION XLVI.

THÉOREME.

241. Si les deux axes AB DE d'une ellipse, sont proportionels aux deux axes ab de d'une autre ; ces deux ellipses seront semblables entr'elles.

DÉMONSTRATION.

Par les foyers Ff soient menées les droites GFF gfh , qui seront chacune égales aux parametres des axes AB ab . (num. 141) & soient tirées les droites AD , DG , GB , GH , HE , EA dans l'une, & les droites ad , dg , gb , gh , he , ea dans l'autre ; il est aisé de faire voir que la premiere figure sera semblable à la seconde, il n'y a qu'à montrer que chacune est composée d'un même nombre de triangles, & que chacun est semblable à son correspondant. 1° le triangle ADC rectangle en C , est semblable au triangle rectangle adc . Car puisque les axes sont proportionels, les moitiés le seront aussi, & l'on aura $AC : CD :: ac : cd$ donc ces triangles sont

semblables puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionels. Par la même raison DCB est aussi semblable à dcb . On démontrera avec la même facilité que le triangle DGB , est semblable au triangle ggb , en faisant voir qu'ils ont un angle égal B, b compris entre côtés proportionels, & pour cela il faudra établir auparavant la similitude des triangles rectangles $GFB gfb$ ce qui ne souffre aucune difficulté. On démontreroit les mêmes choses de l'autre côté, donc la figure $ADGBHE$ est semblable à la figure $adgbhe$ & partant l'ellipse $ADBE$ est aussi semblable à l'ellipse $adbe$ C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

242. Les ellipses semblables, ou dont les axes sont proportionels, sont entr'elles comme les quarrés des mêmes axes, des parametres, des axes ou diametres semblablement tirés, ou comme les quarrés des ordonnées qui passent par les foyers. Car il est aisé de conclure des articles 235 & 236, que les aires de deux ellipses quelconques sont entr'elles comme les rectangles des deux axes, ou comme les parallélogrames formés sur deux diametres conjugués quelconques, qui sont égaux à ces rectangles, suivant ces articles; donc en désignant l'ellipse dont AB & DE sont les axes par $ABDE$ & celle qui a pour axes les droites ab, de par $abde$, on auroit $ABDE : abde :: AB \times DE \times ab \times de$

mais $AB : DE :: ab : de$ par hypothèse,

& $AB : AB :: ab : ab$.

donc en multipliant par ordre.

$$AB' : AB \times DE :: ab' : ab \times de$$

donc $ABDE : abde :: AB' : ab'$ C.Q.F.D.

R E M A R Q U E.

Il ne faut pas confondre une ellipse semblable à une autre, avec une autre courbe dont la courbure est partout également distante de celle d'une ellipse donnée, ou parallèle au périmètre de cette ellipse. On démontre que cette courbe est d'un degré supérieur & ne peut être prise pour une ellipse. Cette vérité sera facile à appercevoir, si l'on fait attention qu'en allongeant les deux extrémités des axes, d'une même quantité, les nouveaux axes qui en résultent ne sont pas proportionels, à moins que ces axes ne soient égaux, auquel cas l'ellipse devient un cercle. Dans tout autre cas, si l'on vouloit décrire cette courbe on pourroit le faire aisément par le moyen des perpendiculaires aux tangentes, en suivant ce qui a été dit, (art. 170.) pour mener ces sortes de lignes à une tangente quelconque.

On voit encore qu'il n'en est pas des ellipses comme des paraboles, qui sont toutes des figures semblables.

Fin de l'Ellipse.

fig 62

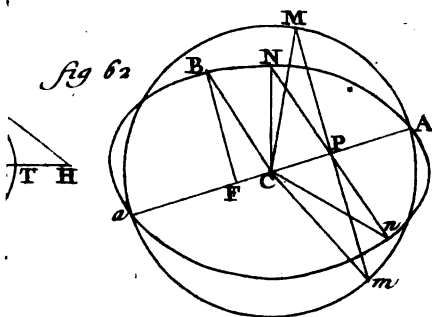


fig 63

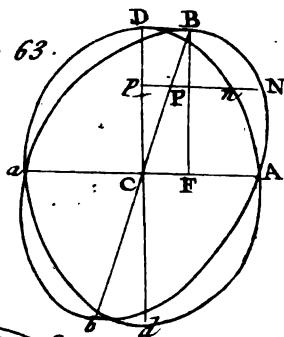
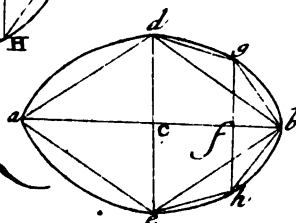


fig 64





DE L'HYPÉRBÔLE,

LIVRE TROISIÈME.

Des propriétés de l'Hyperbole considérée sur
un Plan.

Génération & description de cette Courbe.

243.



Il'on a sur un plan (fig. 65) une ligne droite IT , divisée en deux également, en C , & deux autres points $F D$, sur la même ligne, chacun également éloigné du point C , je dis que l'on pourra trouver une infinité de points P ou p , à droite & à gauche de la ligne IT , prolongée indéfiniment de part & d'autre vers G & g , tels que la différence des lignes FP PD , ou Fp pD menées de chacun de ces points P ou p aux points $F D$, soit toujours égale à la même ligne IT ; ou, ce qui est la même chose, que l'on aura pour un point quelconque P ou p , $FP - PD$ ou $PD - PF = IT$, & de même $pD - pF = IT$.

DÉMONSTRATION.

Du point F comme centre avec un rayon quelconque FG , on décrira un arc de cercle pGP d'une grandeur indéfinie de part & d'autre de la ligne IT ; & ayant ensuite porté la partie DT de T en d du point D comme centre avec un rayon dG , on décrira un autre arc de cercle qui coupera le premier en deux points pP qui seront tels que l'on aura $FP - PD = IT$, car par l'hypothèse, les parties $IFDT$ sont égales, & l'on a fait $dT = DT$, donc $Fd = IT$. Ce la posé, à cause du cercle dont dG est le rayon, on a $DP = dG$, & à cause du cercle dont FG est le rayon, on a $FP = FG$. Donc $FP - PD = FG - dG = Fd$ ou IT . Si l'on veut avoir encore d'autres points, du point F comme centre on décrira une autre portion de cercle avec un autre rayon FG , & coupant le premier cercle en deux points par un autre cercle décrit du point D comme centre avec un rayon dG , on aura encore deux autres points, il est de plus évident que l'on pourra trouver une infinité de points toujours tels que $FP - DP = IT$. C. Q. F. D.

REMARQUE

244. Il est aisé de voir que le rayon variable FG , ne peut pas être plus petit que FT , car alors les cercles décrits du rayon FT , & du rayon DT , ne font que se toucher, & si le point G tomboit entre les points C & T ,
comme

comme en G les cercles décrits des points F & D , avec les rayons FG' & dG' ne pourroient plus se couper ni se toucher en aucun point. Il est encore évident que l'on pourra trouver de la même maniere une infinité de points de l'autre côté de la ligne IT , & qu'un rayon FG avec son correspondant dG , peuvent servir à trouver les quatres points Pp , audessus & audessous de C , qui ayent les mêmes propriétés; enfin que les courbes opposées qui passeront par ces deux suites de points, seront entiere-ment égales & semblables.

COROLLAIRE.

245. Il suit de cette construction que si l'on joint deux points Pp par une droite POp , cette ligne sera perpendiculaire à la ligne IT , prolongée autant qu'il est nécessaire. Car à cause du cercle dont DP est le rayon, les points Pp sont également éloignés du point D , & à cause du cercle Fp est le rayon, les mêmes points Pp sont également éloignés du point F de la même droite IT , donc cette droite a deux de ses points également distans des extrémités de la droite Pp , elle lui est donc perpendiculaire, & réciproquement, la droite Pp lui sera perpendiculaire. Il suit encore de là que si par un point P on mene une ligne perpendiculaire à la ligne IT , cette ligne passera aussi par l'autre point p , & sera coupée en deux également au point O , car si cela n'étoit pas la démonstration précédente seroit fausse. Il

suit de plus de cette construction , que la ligne courbe $PPTpp$ & son opposée $PPlpp$ s'éloignent à l'infini du point C , & que leurs branches s'éloignent aussi continuellement l'une de l'autre; car l'angle DFP s'augmente continuellement à mesure que les rayons FG deviennent plus grands. Enfin on voit clairement que les deux courbes ensemble ou séparément, ne peuvent jamais enfermer un espace.

D É F I N I T I O N S.

I.

246. Chacune des lignes courbes qui passent par les points Pp , s'appelle *hyperbole*, & les deux ensemble s'appellent *hyperboles opposées*.

I I.

247 Le point C , milieu de la droite IT , s'appelle *centre* des hyperboles opposées.

I I I.

248. Les points $F D$ placés sur la ligne IT , à égale distance du centre C , sont nommés *foyers* des mêmes hyperboles.

I V.

249. La ligne droite IT prolongée autant que l'on voudra, est appelée *axe déterminé*, ou premier axe des hyperboles, & la droite NCM perpendiculaire à cet axe & qui passe par le centre, est appelée *second axe indéterminé* des mêmes courbes.

V.

250. Les lignes droites comme PO , menées d'un point de la courbe perpendiculairement à son axe, sont nommées *ordonnées* ou *appliquées* au même axe : une droite Pp est une double ordonnée à l'axe IT , car on a vu que toutes ces lignes sont coupées en deux également par l'axe. (num. 245.)

VI.

251. Les lignes droites comprises entre les extrémités de l'axe & la rencontre des ordonnées sont appelées *abscisses* ou *coupées* de l'axe par rapport à ces ordonnées, ainsi IO OT sont les abscisses de l'ordonnée PO .

VII.

252. Toutes les lignes qui passent par le centre des hyperboles & se terminent de part & d'autre à chacune des hyperboles opposées sont appelées *diamètres*. Les lignes qui passent par le centre & ne rencontrent point les hyperboles, sont appelées *diamètres indéterminés*.

VIII.

253. Une ligne droite qui ne rencontre l'hyperbole qu'en un point & ne peut la couper étant prolongée, est appelée *tangente* en ce point.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

254. Supposant la construction précédente de l'hyperbole, (fig. 66.) Je dis que le carré d'une ordonnée PO à l'axe IT , est au rectangle $IO \times OT$ de ses abscisses IO OT , comme le rectangle $IF \times FT$ ou $ID \times DT$ est au carré de CT moitié du premier axe IT , c'est-à-dire que l'on aura toujours cette proportion pour une ordonnée quelconque.

$$PO^2 : IO \times OT :: ID \times DT : CT^2.$$

DÉMONSTRATION.

Par les foyers F D & le point P origine de l'ordonnée PO , soient menées les lignes FP DP , de ce point P comme centre, avec le rayon DP soit décrit un cercle qui coupe l'axe IT en deux points D G , & la ligne FP en A , & soit prolongée la ligne FP jusqu'au cercle en B , on aura FA ou $FP - AP = IT$, car $AP = PD$, & par la génération de l'hyperbole $FP - DP = IT$: donc si l'on divise cette ligne FA en deux également en R , on aura $FR = CT$. Cela posé, à cause du cercle on aura $FG \times FD = FA \times FB$, d'où l'on tire $FA : FD :: FG : FB$, & prenant les moitiés de chaque terme FR ou $CT : CD :: CO : RP$, car à cause du cercle les segmens DO & OG étant égaux, ainsi que les parties CF CD , on a $FG = FD + DG = 2CD + 2OD$, donc $\frac{FG}{2} = CD + OD = CO$, on verra aussi aisément que $RP = \frac{FB}{2}$, car $FB = FA + AB = 2RA + 2AP$ donc $\frac{FB}{2} = RA + AP = RP$.

reprenant la dernière proportion, on aura
componendo

$$CT : CT + CD :: CO : CO + RP \text{ \& alternando.}$$

$$CT : CO :: CT + CD : CO + RP. \text{ \& encore comp.}$$

$$CT : CT + CO :: CT + CD : CT + CD + CO + RP,$$

ou, en réduisant, $CT : IO :: ID : FP + FO$;

en mettant IC à la place de CT , dans le second & troisieme terme, & dans le dernier, les lignes FR , à la place de CT & CF à la place de CD , si on reprend encore la proportion primitive $CT : CD :: CQ : RP$, on aura *dividendo*.

$$CT : CD - CT :: CO : RP - CO \text{ \& alternando.}$$

$$CT : CO :: CD - CT : RP - CO \text{ \& faisant encore un dividendo.}$$

$$CT : CO - CT :: CD - CT : RP - CO - CD + CT.$$

ou en réduisant $CT : OT :: DT : FP - FO$, en mettant dans le dernier terme FR à la place de CT , & CF à la place de CD ; si donc on multiplie les deux dernières proportions résultantes les unes par les autres, on aura

$$CT^2 : IO \times OT :: ID \times DT : (FP + FO) \times (FP - FO) = FP^2 - FO^2 = PO^2. \text{ car à cause du triangle rectangle } FOP \text{ il est clair que l'on a } PO^2 = FP^2 - FO^2 \text{ donc invertendo \& altern.}$$

$$PO^2 : IO \times OT :: ID \times DT : CT^2. \text{ C. Q. F. D.}$$

Si le cercle décrit du rayon DP , ne faisoit que toucher le prolongement de l'axe IT , ce qui arriveroit dans le cas où l'ordonnée passeroit par le foyer, la proportion seroit toujours la même & la démonstration n'en deviendroît

que plus facile, on auroit alors

$$PD^2 : ID \times DT :: ID \times DT : CT^2.$$

COROLLAIRE I.

255. Puisque l'on a $PO^2 : IO \times OT :: ID \times DT : CT^2$, si par un autre point p de l'hyperbole ou de son opposée, on mene une autre ordonnée po à l'axe, on aura encore $po^2 : Io \times oT :: ID \times DT : CT^2$, mais dans ces deux proportions le dernier rapport est toujours le même; donc on aura $PO^2 : IO \times OT :: po^2 : Io \times oT$; ou *alternando* $PO^2 : po^2 :: IO \times OT : Io \times oT$; d'où il suit que dans l'hyperbole ou dans les hyperboles opposées les quarrés de deux ou d'un nombre quelconque d'ordonnées, sont entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes à ces ordonnées.

Au lieu des rectangles $IO \times OT$ $Io \times oT$, on peut mettre des expressions qui leurs sont égales $CT^2 - CO^2$ & $CT^2 - Co^2$. Nous nous servirons de l'une ou de l'autre expression selon qu'elles seront plus commodes pour les démonstrations.

COROLLAIRE II.

246. Si du point T origine de l'axe IT comme centre, avec un rayon CD , on décrit une portion de cercle qui coupe l'axe indéterminé en deux points M & N , on aura, après avoir tiré TM , dans le triangle TCM , $CM^2 = TM^2 - CT^2 = CD^2 - CT^2 = ID \times DT$. Donc dans les proportions précédentes, on

pourra mettre CM' à la place du rectangle $ID \times DT$. Ainsi l'on aura pour chaque ordonnée $PO' : IO \times OT :: CM' : CT'$. Si l'on prend $CN = CM$, la ligne entière MN supposée perpendiculaire à l'axe IT est appelée *second axe* des hyperboles opposées; ou *axe conjugué* au premier axe IT .

COROLLAIRE. III.

257. Puisque l'on a $PO' : IO \times OT :: CM' : CT'$, on aura aussi $PO' : IO \times OT :: MN' : IT'$; car MN est double de CM , & IT est double de CT , donc leurs quarrés seront entr'eux comme ceux des lignes CM & CT .

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Si par un point P de l'une des hyperboles opposées, on mene une droite Pp , parallèle à l'axe IT , qui rencontre l'autre hyperbole dans un point p , je dis que cette ligne Pp sera coupée en deux également en Q par le second axe MN prolongé, s'il est nécessaire. (Fig. 66.)

DÉMONSTRATION.

Cette proposition suit évidemment de la construction des hyperboles opposées, car puisque ces deux courbes sont égales, semblables, & semblablement disposées à l'égard de leurs axes communs IT MN ; les ordonnées PO po seront égales entr'elles, étant d'ailleurs parallèles, & comprises entre parallèles, donc

Miv

leurs abscisses OT , Io seront aussi égales ; on aura donc en leur ajoutant les lignes égales CT CI , $CO = Cb$ &c à cause des parallèles Pp Oo . on aura $PQ = pQ$. $C.Q.F.D.$

REMARQUE.

259. Les ordonnées servant à déterminer les points des hyperboles, par le moyen du rapport constant qu'elles ont avec leurs abscisses, on peut aussi déterminer les points de chaque hyperbole, en menant des ordonnées au petit axe MN prolongé autant qu'il sera nécessaire, & dans ce cas les parties CQ , sont regardées comme les abscisses.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

260. Si d'un point P de l'une des hyperboles opposées, on mene au second axe MN ; une ordonnée PQ , (Fig. 66.) on aura pour chaque ordonnée, $PQ^2 : CM^2 + CQ^2 :: CT^2 : CM^2$. C'est-à-dire que le carré d'une ordonnée quelconque au petit axe, est à la somme des carrés du demi petit axe & de l'abscisse correspondante ; comme le carré du demi grand axe, au carré du demi petit axe.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'on a $PO^2 : CO^2 - CT^2 :: CM^2 : CT^2$, on aura aussi *alternando* $PO^2 : CM^2 :: CO^2 - CT^2 : CT^2$ & *componendo* $PO^2 + CM^2 : CM^2 :: CO^2 - CT^2 + CT^2 : CT^2$, mais $PO^2 = CQ^2$, & $CO^2 = PQ^2$, donc $CQ^2 + CM^2 : CM^2 ::$

$PQ^2 : CT^2$, ou *alternando & invertendo*.

$PQ^2 : CQ^2 + CM^2 :: CT^2 : CM^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

261. Si l'on mene une autre ordonnée pq , on aura encor $pq^2 : CM^2 + cq^2 :: CT^2 : CM^2$, donc puisque nous avons pour l'ordonnée PQ , $PQ^2 : CM^2 + CQ^2 :: CT^2 : CM^2$, on aura $PQ^2 : pq^2 :: CM^2 + CQ^2 : CM^2 + cq^2$, D'où il suit que les quarrés des ordonnées au petit axe, sont entr'eux comme les sommes des quarrés du demi petit axe & des abscisses correspondantes à ces ordonnées.

COROLLAIRE II.

262. Si l'hyperbole est équilatère, c'est-à-dire, si ses deux axes sont égaux; on aura $PQ^2 = CM^2 + CQ^2$ d'où l'on déduit une méthode fort simple de décrire cette espece d'hyperbole; comme on le verra dans la description des sections coniques.

DÉFINITION.

263. Une troisieme proportionnelle aux deux axes est appellée *parametre* de celui qui occupe le premier terme de la proportion. Si l'on fait cette proportion continue, $IT : MN :: MN : TV$. (Fig. 67.) la ligne TV fera le parametre de l'axe IT , d'où il suit que le rectangle d'un axe par son parametre, est égal au quarré de l'autre axe conjugué au premier.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

264. Supposant le parametre TV de l'axe IT; élevé perpendiculairement à cet axe au sommet T de l'hyperbole, & une ordonnée PO prolongée indéfiniment vers S, si l'on fait cette proportion $TV : IT :: OS : IO$, je dis que le quarré de cette ordonnée PO, sera égal au rectangle de l'abscisse OT, par la droite OS. (Fig. 67.)

DÉMONSTRATION.

Par la propriété des ordonnées à l'axe IT on a $PO^2 : IO \times OT :: MN^2 : IT^2$ & par la nature du parametre $MN^2 : IT^2 :: TV : IT$, & par hypothese $TV : IT :: OS : IO$

Multipliant par OT, $OS : IO :: OS \times OT : IO \times OT$.
donc $PQ^2 : IO \times OT :: OS \times OT : IO \times OT$,
mais les deux conséquents sont égaux, donc
les antécédens le sont aussi, donc $PQ^2 = OS \times OT$,
C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

265. Ayant achevé le rectangle de l'axe par le parametre, si l'on mène par le point V, la droite VR parallèle à l'axe, il est aisé de voir que le rectangle VS est semblable à celui de l'axe par le parametre, & que ce rectangle est l'excès du quarré de l'ordonnée PO sur celui de l'abscisse OT par le même parametre TV, & comme le quarré de chaque ordonnée surpasse toujours le rectangle de son abscisse par le parametre d'un rectangle semblable à celui de l'axe par la même ligne, on a donné le

nom d'hyperbole à la courbe que nous examinons, pour désigner cet excédent toujours constant du quarré d'une ordonnée sur le rectangle d'une de ses abscisses par le parametre.

COROLLAIRE II.

266. Si l'hyperbole est équilatère, le parametre est égal à l'axe, & dans ce cas le quarré de l'ordonnée sera égal au rectangle $IO \times OT$ de ses abscisses; comme on l'a déjà vu, puisque dans ce cas la ligne RS devient égale à la ligne VR ou OT , qui lui est égale.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

267. Dans une hyperbole quelconque, (Fig. 67) la double ordonnée PFp qui passe par le foyer F , est égale au parametre de l'axe.

DÉMONSTRATION.

Soit l'ordonnée PF qui passe par le foyer F ; on aura par la premiere proposition $PF^2 : IF \times FT :: IF \times FT : CT^2$ mais $IF \times FT$ ou $CF^2 - CT^2 = CM^2$, donc $PF^2 : CM^2 :: CM^2 : CT^2$, & prenant les racines de la proportion inverse $CT : CM :: CM : PF$ d'où il suit évidemment que PF est le demi parametre de l'axe IT , puisqu'elle est troisieme proportionnelle aux deux demi-axe. Donc Pp double de PF est le parametre. C. Q. D. F.

COROLLAIRE

268. Il suit de cette proposition & des arti-

cles 66. & 141 de la parabole & de l'ellipse ; que cette propriété est commune à toutes les sections coniques, sans en excepter le cercle, avec cette différence que de toutes ces courbes, la parabole, est la seule dans laquelle elle soit générale, comme nous avons vu, ainsi lorsqu'on connoît le foyer de chacune de ces courbes, il est aisé d'en connoître le parametre, & réciproquement connoissant un axe & son parametre, on pourra toujours trouver les foyers sur cet axe ou sur son conjugué.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

269. Si par un point P de l'une des hyperboles opposées & par le centre C , (Fig. 68.) on mène une droite PCp , je dis qu'elle rencontrera l'hyperbole opposée, & sera coupée en deux également au centre C .

DÉMONSTRATION.

Du point P soit menée l'ordonnée PO à l'axe IT , & soit prise de l'autre côté $Co = CO$, par le point o soit élevée l'ordonnée po au même axe IT , qui rencontrera l'hyperbole en p . Puisque les abscisses IO To sont égales, les ordonnées PO po le sont aussi & de plus comme elles sont ordonnées au même axe, elles lui sont chacune perpendiculaire, donc les triangles COP $Co p$ ont un angle droit compris entre côtés égaux, donc leurs hypoténuses PC pC sont aussi égales. De plus les angles

PCO & $pc o$ sont égaux, & la ligne IT est une seule ligne droite, donc la ligne Pp l'est aussi, & est coupée en deux également par le centre C , puisque les hypoténuses PC & pc sont égales. C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

THÉOREME.

270. Si par l'extrémité T de l'axe. on élève la perpendiculaire TX (Fig. 67.) je dis que cette ligne ne rencontre l'hyperbole, qu'au seul point T , ou, ce qui revient au même, qu'elle est tangente en ce point.

DEMONSTRATION.

Si la ligne TX , n'est pas tangente à la courbe au seul point T , elle aura encore quelqu'autre point comme S qui pourra lui appartenir, ayant pris $Tf = TF$, on aura $Df = IT$; & parce que le point S est supposé à l'hyperbole, on aura aussi par la génération de cette courbe $DS - FS = IT$ ou $DS = IT + FS$, ou enfin $DS = Df + fS$ puisque $Df = IT$ & que $fS = FS$, ce qui est absurde, puisque les deux côtés d'un triangle sont nécessairement plus grand que le troisième. On démontrera de la même manière, que l'on ne peut pas supposer tout autre point de la ligne TX à l'hyperbole, sans un pareil inconvénient, il est donc évident que cette ligne n'a qu'un point de commun avec la courbe, & de plus elle est entièrement au dehors de l'hyperbole, puisque cette courbe

s'éloigne de plus en plus de l'axe auquel la ligne TX est parallèle, donc cette ligne est tangente au seul point T ; comme on l'avoit supposé. $C. Q. F. D.$

PROPOSITION VIII.

THÉOREME.

271. *Supposant toutes choses, comme dans la première proposition, si l'on mène la ligne AD (Fig. 69.) & que par le point E milieu de cette ligne on tire par le point P la ligne PEH , je dis que cette ligne sera tangente en P .*

DÉMONSTRATION.

Supposons que cette ligne ne soit pas tangente, ou, ce qui est la même chose, qu'elle puisse rencontrer encore l'hyperbole dans quel qu'autre point p , de ce point soient menées aux points D, A, F , les droites pD, pA, pF , si ce point p est à l'hyperbole, on aura $pF - pD = IT$, ou FA qui lui est égal, par construction: ce la posé, puisque la ligne PH passe par le point E milieu de DA & que l'on a $PA = PD$, il est visible que cette ligne est perpendiculaire sur le milieu de DA , donc tous ses points & par conséquent le point p , seront à égale distance des mêmes extrémités A & D , donc $pA = pD$, mais à cause du triangle pAF , $pA + AF > pF$, donc aussi $pD + AF > pF$, & ôtant de chaque membre pD , on aura $AF > pF - pD$. Le point p n'est donc pas à l'hyperbole comme on l'avoit sup-

posé puisque la différence des lignes pF pD n'est pas égale à l'axe IT ou AF . On démontreroit la même chose de tout autre point, soit qu'on le prenne au-de-là du point P , par rapport à la ligne AD , ou entre le point P & la même ligne; il est donc démontré, 1°. que la ligne PE ne rencontre l'hyperbole, qu'en un seul point; je dis de plus qu'elle ne peut passer au de dans de cette courbe, ou, ce qui revient au même, qu'aucun point comme S au-de-là de la ligne PE , par rapport à l'axe, ne peut être à l'hyperbole. Pour le démontrer soient encore menées les lignes SF SA SD , il est évident que AS est plus petit que DS , puisque dans le triangle ADS l'angle DAS , est plus grand que l'angle ADS , cela posé, pour que le point S fût à l'hyperbole il faudroit que l'on eut $FS - DS = AF$ ou IT ; ce qui ne peut arriver; car à cause du triangle SAF nous avons $AF + AS > FS$, & partant $AF > FS - AS$ donc à plus forte raison $AF > FS - DS$, d'où il suit que le point S n'est point à l'hyperbole puisque la différence des lignes menées de ce point aux foyers, n'est pas égale au grand axe, d'où il suit évidemment que cette ligne PF est tangente au seul point P . C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

372. Par un point P donné sur une hyperbole, on ne peut mener qu'une tangente PH , (Fig. 70.)

DÉMONSTRATION.

Supposons d'abord que par le point P on puisse mener dans l'angle DPE , une autre tangente Ph , différente de la tangente PH ; du foyer D , j'abaisse sur cette ligne la perpendiculaire Da prolongée indéfiniment: du point F comme centre avec le rayon FA ou IT , je décris un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire Dg en a , par le point a & le foyer F je mene la ligne Fap , qui va rencontrer l'hyperbole dans un point p , du quel je mene au foyer D la ligne pD : enfin par le milieu e de la droite aD , & le point p je mene une ligne ep qui sera tangente en ce point par la proposition précédente. Cela posé il est aisé de reconnoître que la ligne Ph ne peut être tangente en P , car cette ligne étant, *par construction* perpendiculaire sur la ligne aD sera parallèle à la tangte pe qui est aussi perpendiculaire à la même ligne, comme on l'a vu précédemment, & elle sera par tout également éloignée de cette tangente de la distance eg . Reste à faire voir que cette distance est tout entière du côté de l'axe IT , ou, ce qui est la même chose, entre la tangente pe & le même axe. A cause du triangle FPa , $Fa + aP > FP$, mais $FP = FA + AP$ ou $Fa + AP$ donc $Fa + aP > Fa + AP$, donc $aP > AP$, le triangle DPa n'est donc pas isocèle, & le plus grand segment de la base aD sur laquelle on a, *par construction*, abaissé la perpendiculaire Pg ,
se

se trouvera du côté du plus grand côté aP , & le plus petit segment du côté du plus petit DP , d'où il suit que la droite Ph est nécessairement au-de-dans de l'hyperbole puisque la distance eg qui la sépare de sa parallèle pe tangente en p , se trouve entre cette tangente & l'hyperbole. Donc on ne peut mener qu'une seule tangente par un même point P . C. Q. F. D.

R E M A R Q U E.

La démonstration & l'évidence de cette proposition, soit dans la parabole, soit dans l'ellipse & l'hyperbole, se réduit à concevoir clairement, qu'une ligne parallèle à une tangente & qui a déjà un point sur la courbe, ne peut être tangente à cette courbe ; rien de plus aisé à imaginer.

P R O P O S I T I O N X.

T H É O R È M E.

273. Si par un point P (Fig. 69.) où une droite PH touche une hyperbole; on mene aux foyers F, D , les droites PF, PD , dont l'une FP soit prolongée au-dedans de l'hyperbole vers L , je dis que ces lignes forment des angles égaux DPE pPL avec la tangente. PH .

D É M O N S T R A T I O N.

Puisque le triangle DPA est isocèle, & que la tangente PE est perpendiculaire sur la droite AD , elle divise l'angle DPA en deux

N

également, ainsi l'on aura $DPE = EP A$;
 mais $EP A = p P L$ qui lui est opposé au som-
 met, donc $DPE = p P L$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

274. Il Suit de cette proposition & des lois
 des corps à ressort qui se réfléchissent en fai-
 sant l'angle de réflexion égal à celui d'inci-
 dence, qu'un corps élastique quelconque, étant
 parti du foyer D suivant une direction DP ,
 qui va rencontrer la courbe dans un point P ,
 se réfléchira suivant une ligne PL dont le pro-
 longement passe par le foyer F .

REMARQUE.

275 On peut encore conclure de cette pro-
 position & des articles 37. & 155. de la pa-
 rabole & de l'ellipse, que cette propriété est
 commune à toutes les sections coniques, c'est-
 à-dire, que dans une section conique quel-
 conque, un corps qui va d'un foyer de cette
 courbe à un point de la même courbe, sui-
 vant une ligne droite, se réfléchira à sa ren-
 contre suivant une ligne qui passera par l'autre
 foyer, prolongée s'il est nécessaire. Car on
 peut concevoir la parabole comme une courbe
 qui tient le milieu entre l'ellipse & l'hyperbole,
 enforte que ses deux foyers sont à une distance
 infinie l'un de l'autre ; soit qu'ils soient tous
 les deux placés dans la concavité de cette cour-
 comme cela arrive dans l'ellipse, soit que l'un
 se trouve au dedans & l'autre au-dehors

de la courbe sur l'axe prolongé à l'infini, auquel cas la parabole devient un espece d'hyperbole. Il faut encore remarquer que l'on retrouve dans la parabole les propriétés de l'ellipse & de l'hyperbole, par rapport aux axes & aux foyers.

Soit la parabole PT (fig. M.) dont l'axe est TF , la directrice AG , le foyer D , un autre foyer f , à une distance infinie du premier au-dedans de la courbe ou sur le prolongement de l'axe au-dehors comme en F , & les points I , L , éloignés des points f , F , de la grandeur GT ; je dis que l'on aura toujours $PD + Pf = LT$ ou $PF - PD = IT$.

Par le point P , soient menées perpendiculairement à l'axe & à la directrice les droites PA , PQ ; par la nature de la parabole (art. 1.) $PD = PA = QG$; mais à cause du foyer f , supposé à une distance infinie, les droites Pf & Qf sont censées égales & parallèles, donc en leurs ajoutant des lignes égales PD , QG , on aura $Pf + PD = Qf + QG = Gf = LT$, en ôtant GT & mettant à sa place LT qui lui est égale; ce qui revient à la principale propriété de l'ellipse.

De même à cause du foyer F , aussi supposé à une distance infinie sur l'axe prolongé, les droites PF , QF seront égales, donc en ôtant les lignes égales PD , QG , on aura $PF - PD = QF - QG = GF$ ou IT ; ce qui revient à la principale propriété de l'hyperbole.

USAGE DE LA DERNIERE PROPRIÉTÉ.

De l'Hyperbole dans la Catoptrique.

Il suit encore de là , que si l'on place une lumière au foyer d'une hyperboloïde concave formé par le révolution d'une hyperbole autour de son axe, tous les rayons partis du point lumineux se réfléchiront à la rencontre de la courbe suivant des directions qui passeront par le foyer de l'hyperbole opposée. Si les deux foyers sont fort près les uns des autres, les rayons réfléchis seront très divergens & ne produiront que peu de lumière à une distance médiocre, mais on sera maître de les rapprocher autant qu'on voudra du parallélisme ; en se servant d'une hyperbole dont les foyers soient à une distance considérable, & quoique le diamètre de la portion d'hyperboloïde dont on se sert soit petit, on pourra néanmoins éclairer une étendue déterminée à quelle distance on voudra : ce que l'on ne pourroit pas faire par le moyen d'un paraboloïde qui ne peut éclairer par tout qu'une surface égale au cercle qui lui sert de base. On voit par là comment on peut se servir de l'hyperboloïde dans la construction des lanternes à réflexion que l'on met aux chaises de postes pour éclairer les voyageurs : on pourroit à la vérité, produire le même effet par le moyen d'une portion concave d'ellipsoïde, & on se sert ordinaire-

ment d'une portion de sphere terminée en cône, mais la lumiere souffre plusieurs réflexions, qui peuvent en diminuer l'intensité, au lieu que dans l'hyperboloïde chaque rayon ne se réfléchit qu'une fois & par conséquent arrive à la même distance avec plus de force que s'il l'avoit été plusieurs fois.

PROPOSITION XL.

PROBLÈME.

276. Un point G étant donné sur le même plan de l'hyperbole, & hors de cette courbe (Fig. 71.) mener par ce point une tangente à la courbe, & déterminer le point P de contingence.

SOLUTION.

Du point donné G , au foyer D , soit menée la ligne GD ; du même point comme centre avec un rayon GD , soit décrite une portion de cercle vers A , ensuite de l'autre foyer F comme centre, avec le rayon FA ou IT , soit décrit un autre arc de cercle qui coupe le premier au point A , & soient joints les points D, A , par la ligne AD , laquelle soit divisée en deux également en E , enfin par les points G, E soit menée la ligne EG , qui sera tangente en P , où la ligne FA prolongée rencontre l'hyperbole.

DÉMONSTRATION.

Puisque, par construction, on a $GD = GA$, & $DE = AE$, la ligne GE est perpendiculaire

sur le milieu de AD , donc elle passera par tous les points également éloignés des extrémités A & D de la ligne AD , donc elle doit aussi passer par le point P , déterminé comme nous l'avons dit ci-dessus, puisque par la nature de l'hyperbole, on a $AP = PD$. De plus le point P de la ligne FG , est le seul point qui puisse être à l'hyperbole, puisque l'on a $FP - AP = FP - PD = IT$, ou FA qui lui est égal, par construction, ce qui ne se peut trouver en aucun autre point de la même ligne, comme il a été suffisamment démontré dans les propositions précédentes. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

277. Si le cercle qui a GD pour rayon, coupe l'hyperbole en deux points, on voit aisément que le problème aura deux solutions; car on pourra trouver de la même manière un point a de l'autre côté, qui ait les mêmes propriétés, & joignant la ligne aD , la ligne Gep qui passera par son milieu e & le point G , sera aussi tangente à la courbe en p .

REMARQUE.

La solution du problème seroit la même, si le point G se trouvoit au de-là de P ou de p par rapport à l'axe; elle seroit encore la même si le point G étoit sur l'hyperbole, comme est le point P , en ce cas le problème ne pourroit avoir qu'une solution, parceque les

deux cercles dont PD & FA ou IT sont les rayons, ne font que se toucher en un point; d'où il suit que par un point P donné sur une hyperbole, on ne peut mener qu'une tangente; ainsi cette solution renferme tous les cas possibles.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

278. Supposant encore les choses comme dans la proposition dixième, (Fig. 72.) si l'on divise en deux également l'angle FPP formé par les lignes PF PD , menées d'un point P aux foyers F D , par une ligne PR ; je dis que cette ligne sera perpendiculaire à la tangente, & que l'on aura comme dans l'ellipse (Art. 156.) $FR:RD::FP:PD$; c'est-à-dire que les distances du point R , dans lequel la perpendiculaire PR à une tangente PH , rencontre l'axe, sont entr'elles comme les distances du point d'attouchement P aux mêmes foyers.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'angle PPF a été divisé en deux également, on aura $FPR = RPP$, mais $RPP = NPA$, & de plus (num. 273.) $FPE = EPA$, donc $RPF + FPE = NPA + APE$, ou $RPE = NPE$, d'où il suit que la ligne RP est perpendiculaire à la tangente PE . C. Q. E. 1^o D.

2^o Puisque (num. 273.) la ligne AF est perpendiculaire à la tangente, elle sera parallèle

à la ligne RP & les triangles DAF DPR seront semblables, donc on aura $FR:RD::PA$ ou $PF:PD$. C. Q. F. 2^o D.

COROLLAIRE

279. Il suit de cette proposition que jamais le point R ne pourra tomber entre le sommet T de l'hyperbole & le foyer F , puisque si proche que l'on suppose le point P du point T , la ligne PR se trouvera toujours au dedans de l'angle FPp qu'elle divise en deux également.

PROPOSITION XIII

THÉORÈME.

280. Supposant encore toutes choses comme dans la proposition précédente, par un point P de l'hyperbole soit tirée une droite PQ parallèle à l'axe, sur laquelle on prendra une partie $PQ=PF$, si du point Q , ainsi déterminé, & du foyer F on mène à la droite PR , les perpendiculaires QN FM , je dis que l'on aura toujours $NQ:FM::IT:FD$. C'est-à-dire, que ces perpendiculaires seront toujours entr'elles dans le rapport constant de l'axe IT à la distance FD des foyers F , D . (fig. 72).

DÉMONSTRATION.

Les triangles rectangles PQN RPO sont évidemment semblables, car à cause des parallèles PQ FD , coupées par la même droite MN , l'angle NPQ est égal à l'angle PRO , donc

aura $QN : PQ :: PO : RP$ & à cause des triangles rectangles RPO , RFM , qui sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en R outre l'angle droit, on aura

$PO : RP :: FM : RF$, donc $QN : PQ :: FM : RF$.
Ou bien en alternant & mettant FP à la place de PQ qui lui est égal, $QN : FM :: FP : RF$, ou
 $:: AP : RF$; mais $AP : RF :: AD$ ou $IT : FD$,
comme il est évident à cause de parallèles AF ,
 PR , donc $QN : FM :: IT : FD$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. I.

281. Puisque les droites, PF , PQ sont égales (par construction.) Si l'on regarde chacune de ces lignes comme le sinus total, la ligne NQ fera le sinus de l'angle NPQ ou $q^P R$, & la ligne FM fera le sinus de l'angle FPM ou de l'angle FPN son supplément. Donc ces sinus sont toujours entr'eux dans le rapport constant de la distance des foyers, au grand axe IT .

COROLLAIRE. II.

Usage de cette Proposition dans la Dioptrique.

282. On a reconnu par expérience qu'un rayon qui se réfracte au passage d'un milieu dans un autre plus ou moins dense, suit toujours une loix constante dans ses réfractions quelque soit l'angle d'incidence, en sorte que le sinus de cet. angle est toujours dans un même rapport avec le sinus de l'angle rompu. Cela posé après avoir déterminé par expé-

rience, le rapport du sinus de l'angle d'incidence, au sinus de l'angle de réfraction, d'un rayon qui passe de l'air dans le verre; si l'on fait une hyperbole dont la distance FD des foyers, ait avec son axe IT , le rapport des des sinus des angles de réfraction & d'incidence, qui est celui de 2 à 3, comme on sçait par expérience, on pourra par le moien d'un hyperboloïde de verre formé par la révolution de cette courbe autour de son axe, rassembler en un même point tous les rayons parallèles qui viendroient tomber sur la surface plane représentée par l'ordonnée VS , & réciproquement on pourra, par le moien du même corps faire en sorte que les rayons partis d'un même point D , hors de ce corps, & sur le prolongement de son axe, sortent du même corps, suivant des directions parallèles entr'elles, & perpendiculaires au plan du cercle qui sert de base à cette portion d'hyperboloïde.

Car le rayon qP venant à tomber perpendiculairement sur le plan VS , comme on le suppose, arrive au point P , sans souffrir aucune réfraction, & il y rencontre la courbe, comme s'il tomboit sur un plan représenté par la tangente PH : l'angle qPR ou son égal NPQ , sera donc l'angle d'incidence de ce rayon, l'angle APN sera l'angle de réfraction dont le sinus est FM , puisque $APN = FPM$, (art. 278.), & que d'ailleurs ces sinus sont entr'eux dans le rapport des sinus des

angles d'incidence & de réfraction convenables à un rayon qui sort du verre pour entrer dans l'air. Donc le rayon Pq sortira suivant la ligne PD , & comme on fera voir la même chose de tout autre rayon, il est démontré que tous les rayons parallèles & perpendiculaires au plan VS , se réuniront au point D .

Réciproquement si le point D placé sur l'axe est un point lumineux dont les rayons viennent rencontrer la surface convexe du même corps, suivant des directions quelconques DP , les rayons se réfracteront à la rencontre de ce corps suivant des lignes Pq parallèles entr'elles, & à l'axe du même corps, car l'angle APN est l'angle d'incidence, dont le sinus est FM , & l'angle QPN ou qPR qui lui est opposé au sommet, est l'angle de réfraction dont le sinus est QN , puisque ces sinus sont entr'eux comme FD est à IT que l'on suppose avoir entr'eux le rapport des sinus, des angles d'incidence & de réfraction, convenables aux rayons qui passent de l'air dans le verre.

COROLLAIRE. III.

283. Comme on peut faire une infinité d'hyperboles différentes, toujours telles que l'on ait $IT : FD :: 2 \text{ à } 3$, il s'en suit que l'on peut avoir une infinité de verres hyperboloides, qui ayent les propriétés que nous venons de démontrer. On peut voir les différentes applications que fait M. Descartes de

ce principe dans traité livre de Dioptrique, il seroit à souhaiter que l'on put réduire en pratique une si belle théorie, il n'est pas douteux qu'on ne fût amplement dédommagé des difficultés que l'on rencontreroit dans l'exécution.

DÉFINITION.

284. Si par l'une des extrémités T de l'axe IT , on élève une droite ATa (Fig. 73) perpendiculaire à cet axe & dont les parties AT & Ta soient chacunes égales à la moitié du petit axe MN , les droites indéfinies AC & aC qui passent par les extrémités de cette ligne & le centre C sont nommés *asymptotes* des hyperboles opposées.

COROLLAIRE I.

285. Il suit de cette définition qu'ayant le centre des hyperboles le grand axe & les foyers on pourra aisément déterminer les asymptotes car la détermination de ces lignes dépendant du second axe MN ; dèsque l'un est déterminé, elles le sont aussi. On a vu (num. 256) la manière de trouver le second axe par la connoissance du premier & des foyers. Il ne sera pas plus difficile de trouver les asymptotes par la connoissance du petit axe & des foyers du grand axe, pourvu que le centre des hyperboles soit donné & le grand axe déterminé de position.

COROLLAIRE II.

286. Réciproquement connoissant les asymptotes d'une hyperbole on connoitra aussi ses axes & ses foyers. Par exemple connoissant les asymptotes CG CB des hyperboles opposées on connoît d'abord l'axe IT , parceque l'on suppose que les courbes sont données de position ; & que d'ailleurs cet axe divise l'angle des asymptotes en deux angles égaux. Le sommet T de l'axe IT étant donné, on a le second axe en menant par ce point la droite ATA perpendiculaire à l'axe, & terminée de part & d'autre aux asymptotes. Enfin on déterminera les foyers par la connoissance des deux axes comme au numero 256.

PROPOSITION XIV.

THÉOREME.

287. Supposant les mêmes choses que dans la définition précédente, si l'on prolonge une ordonnée PO à l'hyperbole, jusqu'à ce qu'elle rencontre les asymptotes à droite & à gauche de l'axe en P & en G , je dis que l'on aura toujours $GP \times PB = TA'$. C'est-à-dire que le second demi-axe est toujours moyen proportionnel entre les distances d'un point quelconque de l'hyperbole aux asymptotes, ces distances prises sur le prolongement de l'ordonnée PO .

DÉMONSTRATION.

Les lignes AT OB étant parallèles par construction, les triangles CTA COB sont semblables, donc on aura

$CO^2 : OB^2 :: CT^2 : TA^2$ & par la première proposi.

$CT^2 : TA^2 :: CO^2 - CT^2 : PO^2$.

donc $CO^2 : OB^2 :: CO^2 - CT^2 : PO^2$ & alter.

$CO^2 : CO^2 - CT^2 :: OB^2 : PO^2$. donc divid.

$CO^2 : CO^2 - CO^2 + CT^2 :: OB^2 : OB^2 - PO^2$.

réduisant & alternant $CO^2 : OB^2 :: CT^2 : OB^2 - PO^2 = GP \times PB$, par le Lemme fondamental : mais nous venons de voir que ;

$CO^2 : OB^2 :: CT^2 : TA^2$, donc $CT^2 : TA^2 :: CT^2 : GP \times PB$. D'où il suit que $TA^2 = GP \times PB$; C. Q. F. D.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

288. Si par un point P de l'hyperbole (Fig. 73) on mène une droite Pg , parallèle à l'axe IT , & terminée à l'autre asymptote Cg , on aura $gP \times Pb = CT^2$; c'est-à-dire que le demi-axe CT est moyen proportionnel, entre les distances d'un point P de l'hyperbole aux deux asymptotes, ces distances prises sur une ligne parallèle au grand axe.

DÉMONSTRATION.

Par la définition des asymptotes, il est clair que la ligne bg , est coupée en deux également en K par le petit axe MN , prolongé

s'il est nécessaire, car l'angle $K C g$ est égal à l'angle $K C b$ de plus l'angle en K est droit dans les triangles CKb , & CKg , qui ont encore le côté commun CK . Donc ces triangles sont égaux en tout. Donc $gK = bK$: cela posé à cause des triangles semblables COB CKb , on a $OB^2 : CK^2 :: CO^2 : bK^2$, mais $CK^2 = PO^2$, & $CO^2 = PK^2$, à cause des parallèles $PK CO$, donc $BO^2 : PO^2 :: PK^2 : bK^2$, donc on aura *dividendo*. $BO^2 - PO^2 : BO^2 :: PK^2 - bK^2 : PK^2$, & par le Lemme fondamental, $BO^2 - PO^2 = GP \times BP$ & $PK^2 - bK^2 = gP \times Pb$, donc en substituant ces expressions, & alternant, on aura, $GP \times PB : gP \times Pb :: BO^2 : PK^2$ ou CO^2 .

$BO^2 : CO^2 :: TA^2 : CT^2$,
donc $GP \times PB : gP \times Pb :: TA^2 : CT^2$,
mais par la dernière proposition $GP \times PB = TA^2$,
donc $gP \times Pb = CT^2$. C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

289. Je dis que l'hyperbole & son asymptote, s'approchent toujours de plus en plus, si loin qu'on prolonge l'une & l'autre, sans jamais pouvoir se toucher, & de plus, que l'on peut toujours trouver une ligne plus petite que la partie PB d'une ordonnée prolongée, comprise entre l'hyperbole & l'asymptote, si petite que soit cette ligne.

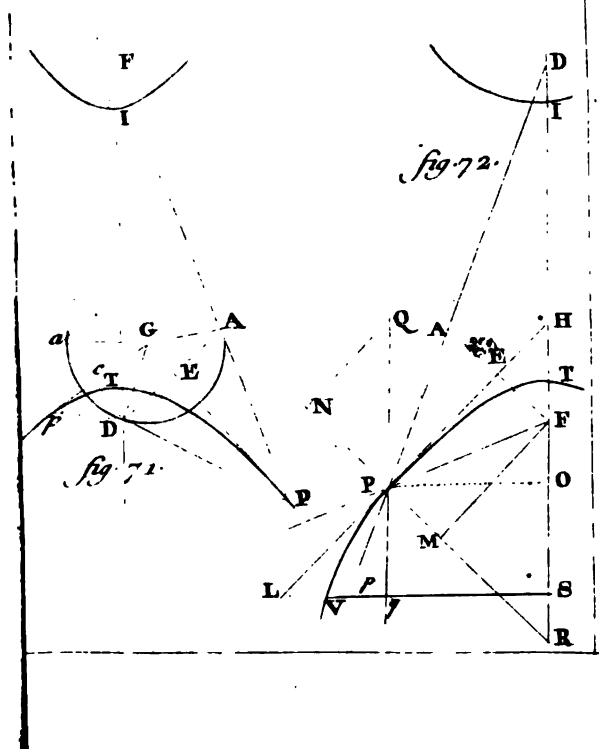
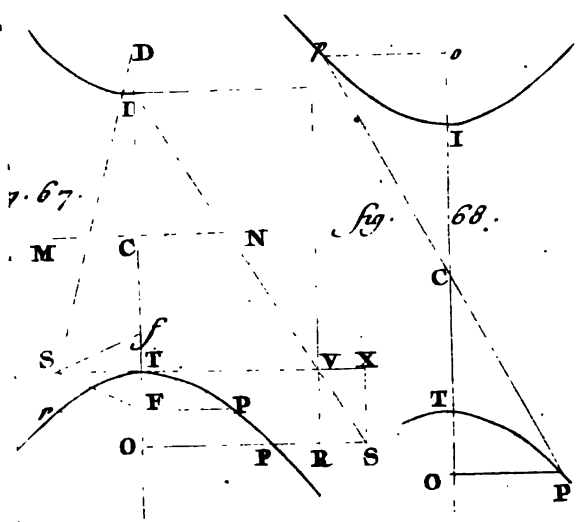
DÉMONSTRATION.

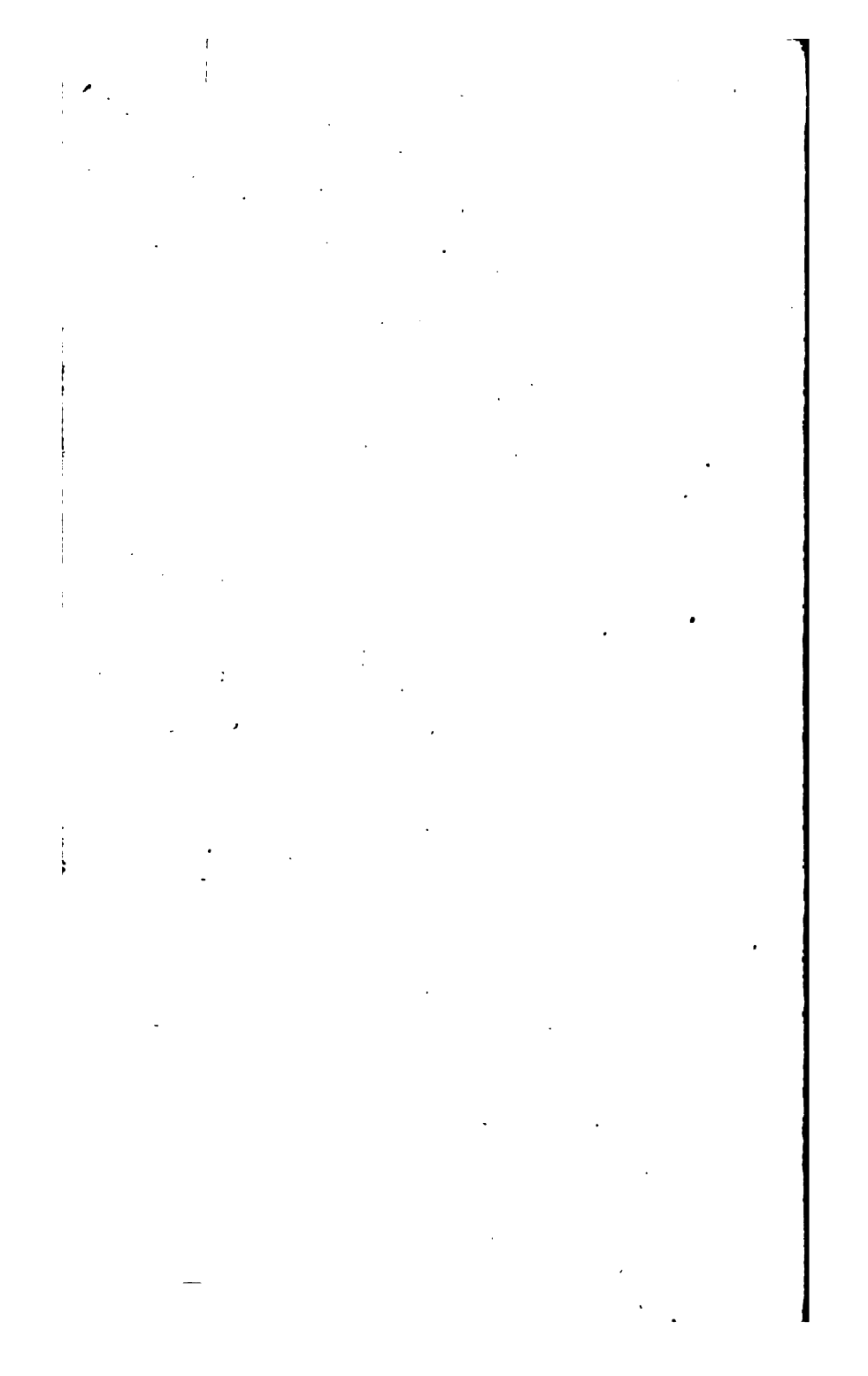
Par la proposition 14 $GP \times PB = TA^2$, mais il est évident que GB augmente à mesure que que cette ligne s'éloigne du centre C , donc PB diminue, sans cependant pouvoir jamais être nulle, car on auroit $GP \times PB = 0$, ce qui seroit contre la même proposition, d'où il suit évidemment que l'hyperbole & son asymptote s'approchent continuellement sans jamais pouvoir se toucher, & c'est ce que signifie le mot d'asymptote.

On peut encore prouver cette vérité directement par la proportion dont nous nous sommes servis dans la 15^{me} proposition.

Nous avons trouvé $CO^2 : BO^2 :: CO^2 - CT^2 : PO^2$, mais il est évident que CO^2 est plus grand que $CO^2 - CT^2$, donc aussi BO^2 sera toujours plus grand que PO^2 & partant BO sera aussi plus grand que PO , donc jamais le point P ne se confondra avec le point B . C. Q. F. D.

2°. Si petite que soit la ligne donnée, BP , on pourra toujours trouver un rectangle égal au carré de TA , dont l'un des côtés soit plus petit que la ligne donnée, puisqu'on ne suppose pas cette ligne infiniment petite; & ayant appliqué perpendiculairement à l'axe dans l'angle des asymptotes, la ligne égale à la somme des côtés de ce rectangle, le point P de division des mêmes côtés, se trouvera sur l'hyperbole, par la 14^{me} proposition





position, & d'ailleurs on a fait la ligne PB , plus petite que la ligne proposée. $C:Q.F. 2^o D.$

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

290. Si par deux points A, P d'une même hyperbole, ou des deux hyperboles opposées (Fig. 74. & 75.) on mene deux lignes droites $PH AD$, & deux autres $PF AB$ parallèles entr'elles, dont les unes soient terminées à une asymptote, & les autres à l'autre asymptote, je dis que le rectangle $PF \times PH$ est égal au rectangle $AB \times AD$.

DÉMONSTRATION.

Ayant mené par les point $P A$, les perpendiculaires à l'axe EPG , LAK terminées aux asymptotes en E, G, L, K : à cause des parallèles $AD PH, AK PG, AB PF$, les triangles $EPF, LAB; PGH, AKD$ sont semblables: donc on aura pour les premiers triangles $EP:PF::AL:AB$, & à cause des seconds triangles. $PG:PH::AK:AD$, en multipliant par ordre on aura, $EP \times PG:PF \times PH::AL \times AK:AB \times AD$: mais par la proportion 17. $EP \times PG = AK \times AL$, puisque chacun de ces rectangles est égal au carré de la même ligne, donc aussi le rectangle $PF \times PH = AB \times AD$.

R E M A R Q U E

Il est aisé de reconnoître que la proposition est toujours vraie, soit que l'on prenne les deux



points A, P sur une même hyperbole, comme dans la figure 74; soit que l'on prenne un point sur une hyperbole & l'autre sur son opposée, comme dans la figure 75, de manière que la ligne PH se termine à l'asymptote CK & la ligne AD à l'autre asymptote CG ; soit enfin, que la droite PH se trouve renfermée dans l'angle GCL & la droite AB terminée à l'asymptote CB (fig. 74.).

COROLLAIRE I.

291. Si l'on imagine que les droites PF, AB parallèles entr'elles, comme on l'a supposé, tournent autour des points A, P avec des vitesses égales; elles conserveront leur parallélisme dans toutes les situations imaginables, & l'on aura toujours $AB \times AD = PF \times PH$: donc si ces lignes se confondent avec les droites AD, PH , étant devenues Ad, Ph , on aura encore $Ad \times AD = PH \times Ph$.

COROLLAIRE II.

292. Si l'on imagine que l'une de ces lignes; AD par exemple (Fig. 75), se meuve parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle passe par le centre C , il est visible que les points Dd se rapprocheront toujours l'un de l'autre & se confondront en un seul & même point au centre C , lorsque la ligne AD sera devenue MCN . Donc puisqu'on a toujours $PH \times Ph = AD \times Ad$, on aura $PH \times Ph = CM^2$. D'où il suit, que le carré de la moitié d'un

demi diamètre déterminé quelconque MCN ,
 est égal à chacun des rectangles faits sur les
 distances d'un point A ou P de l'hyperbole,
 aux asymptotes ; ces distances prises sur une
 ligne AD ou PH parallèle au même diamètre.

COROLLAIRE III.

293. Soient prolongées les lignes PH AD ,
 (fig. 75.) jusqu'à ce qu'elles rencontrent les
 hyperboles opposées dans les points p , a : on
 démontreroit comme dans les propositions pré-
 cédentes, que les rectangles $aD \times ad$, $ph \times pH$
 sont égaux entr'eux, & de plus par le Corollaire
 précédent, ces mêmes rectangles sont égaux
 chacun au carré de CM ou de CN ; donc
 $Ph \times PH = pH \times ph$, & $AD \times Ad = ad \times aD$;
 donc les parties Ad , aD , AD , ad sont égales
 ainsi que les parties Ph , pH , PH , ph . Pour le
 prouver, on fera attention que puisque, par le
 Corollaire présent, on a $pH \times ph = Ph \times PH$,
 on aura aussi en mettant dans cette équation
 $pP - Ph$ à la place de ph , & $pP - pH$, à la place
 de PH ; $pH \times pP - pH \times Ph = Ph \times pP - Ph \times Ph$.
 Ainsi ôtant de chaque membre le rectangle
 $pH \times Ph$, & divisant le reste par Pp , on aura
 $pH = Ph$ & partant $PH = ph$.

COROLLAIRE IV.

294. Supposant toujours que les droites
 $ADPH$ sont parallèles (fig. 74) qu'elles coupent
 l'hyperbole aux points a p , & qu'elles ren-
 contrent les deux asymptotes aux points

O ij

D, H, d, h ; on démontreroit comme dans la proposition précédente que $aD \times ad = Hp \times ph$. Si l'on imagine que l'une de ces parallèles Dd , se meuve toujours parallèlement à elle-même du côté du centre C ; il est évident que les points Aa , s'approchent continuellement l'un de l'autre & qu'enfin ils se confondent en un seul point O , lorsque la ligne Dd , est devenue MN , & qu'elle ne rencontre plus l'hyperbole qu'en un seul point.

COROLLAIRE V.

295. Puisque l'on a pour deux points quelconques; $AD \times Ad = PH \times Ph$, & $aD \times ad = pH \times ph$, on aura aussi $AD \times Ad$ ou $PH \times Ph = MO \times ON$, & par la même raison, $aD \times ad$ ou bien $pH \times ph = MO \times ON$. car l'on peut concevoir la ligne MN , comme une des sécantes parallèles, qui ne rencontre l'hyperbole que dans un point; & dans ce cas, le rectangle $AD \times Ad$, devient $MO \times ON$. Donc les rectangles $AD \times Ad$, $aD \times ad$; $PH \times Ph$, $pH \times ph$, sont égaux chacun à chacun, puisqu'ils sont chacun égaux au même rectangle $MO \times ON$.

COROLLAIRE VI.

296. Il suit de là, que les lignes Ad aD , comprises entre la courbe & ses asymptotes, sont égales, ainsi que les lignes Ph pH . Donc aussi une ligne MON parallèle aux droites Hh Dd , & qui ne rencontre l'hyperbole que dans un point O , est coupée en deux parties

Égales à ce point, & partant tous les rectangles $AD \times Ad$, $PH \times Ph$, $aD \times ad$, $pH \times ph$ sont égaux entr'eux & au quarré OM^2 de la moitié de MN .

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

297. Si une ligne droite FH , (fig. 76.) touche l'hyperbole en un point, je dis 1°. qu'elle rencontre les asymptotes en deux points FH , 2°. qu'elle est divisée en deux également au point touchant P .

DÉMONSTRATION.

1° Soit menée par le point P l'ordonnée EPG à l'axe, terminée aux asymptotes en E & G . Si la tangente PH ne rencontre pas les asymptotes, elle sera nécessairement parallèle à l'une des deux: que ce soit à CG , si c'est possible; nous avons vu (art. 289.), que l'on pourroit toujours trouver une ligne plus petite que PG , & qui lui étant parallèle soit comprise entre l'hyperbole & son asymptote; le prolongement de cette ligne rencontrera nécessairement la ligne parallèle à l'asymptote au dedans de l'hyperbole. On ne peut donc supposer une tangente parallèle à une asymptote sans supposer en même tems qu'elle coupe l'hyperbole; ce qui est contre la nature des tangentes. donc la ligne FH , rencontre les asymptotes aux points $FH.C.Q.F.$ 1° D.

2°. Je dis de plus que le point touchant P , est au milieu de la ligne FH . Si ses deux parties.

ne sont pas égales, il faut nécessairement que l'une soit plus grande que l'autre : imaginons que PH est plus grande que PF , & prenons $Hp = PF$; soit ensuite menée par le point p la droite gpe parallèle à GPE . A cause des parties égales PF pH & des parallèles GE ge , qui forment les triangles semblables Hpg HPG , FPE Fpe , on aura $pg : PG :: Hp : HP$ & $FP : Fp :: PE : pe$, & mettant à la place de FP & Fp leurs égales Hp & HP (*hypp.*), on aura $Hp : HP :: PE : pe$, donc à cause de la première proportion on aura $pg : PG :: PE : pe$, & prenant le produit des extrêmes & des moyens $PE \times PG = pe \times pg$, d'où il suit que le point p sera un point à l'hyperbole : la tangente rencontreroit donc l'hyperbole en deux points, si l'on suppose que le point P , n'est pas au milieu de FH . On démontrera de la même manière que FP ne peut pas être plus grand que PH , sans une pareille contradiction, donc $FP = PH$. C. Q. F. 2^o D.

COROLLAIRE.

298. Il suit de là que la ligne MN (*fig. 74*) parallèle aux sécantes AD PH , que l'on suppose ne rencontrer l'hyperbole qu'en un seul point O , est tangente à ce point, car nous avons démontré (*art. 296.*) qu'elle est coupée en deux parties égales au point O . Donc les rectangles $AD \times Ad$, $PH \times Ph$; sont égaux au carré de la moitié de la tangente à l'hyper-

bole supposée parallèle aux sécantes $DdHh$.

PROPOSITION XIX.

THÉOREME.

299. Si des points A, P d'une hyperbole, qu des hyperboles opposées (fig. 77.) on mene des droites AB, AD, PF, PH parallèles aux asymptotes ; je dis que le parallélogramme $PFCH$ est égal au parallélogramme $ABCD$.

DEMONSTRATION.

Cette proposition n'est , pour ainsi dire , qu'un corollaire de la 17eme. : car , par cette proposition, puisque les lignes AB, AD sont parallèles aux lignes PF, PH ; on aura cette égalité $AB \times AD = PF \times PH$, d'où l'on tire $AB : PF :: PH : AD$. Mais les angles en A & en P sont égaux , puisque les lignes qui les comprennent sont parallèles, donc ces parallélogrammes sont égaux , puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés réciproques. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

300. Puisque l'on a pour deux points quelconques A, P de l'hyperbole $AB \times AD = PF \times PH$; si par le point M extrémité de l'axe , on mene les parallèles aux asymptotes ML, Ml , ces droites ML, Ml seront égales ; car il est aisé de voir que le triangle MLC est isocèle , puisque l'axe divise l'angle des asymptotes en deux parties égales. Donc le rectangle $PF \times PH$

Q. E. D.

devient le carré de ML ou Ml , lorsque le point P tombe sur le sommet M de l'hyperbole, & partant on aura cette équation pour exprimer la nature de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes, $AB \times AD = ML^2$ ou bien $PF \times PH = ML^2$.

DÉFINITIONS.

301. Le carré de la ligne CL ou de son égale ML , menée par le sommet de l'hyperbole parallèlement à l'une des asymptotes, est appelé *puissance* de l'hyperbole. (fig. 77.)

302. Les parties Cl , CF , CB des asymptotes prises depuis le Centre C , sont appelées *abscisses* ou *coupées* des asymptotes.

303. Les lignes Ml , PF , AB parallèles à l'une des asymptotes, & terminées entre la courbe & l'autre asymptote, sont appelées *ordonnées aux asymptotes*, ou bien *ordonnées extérieures* de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes.

COROLLAIRE II.

304. Il suit du corollaire premier & des définitions précédentes que l'on peut aisément trouver tant de points qu'on voudra d'une hyperbole ou des hyperboles opposées, par le moyen de la constante ML , & des indéterminées CF , CB , PF , AB : car puisque l'on a $PF \times PH = ML^2$, on aura aussi $PF \times CF = ML^2$, parceque les lignes PH & CF sont égales étant les côtés opposés du parallélogramme $PFCH$.

D'où l'on tire $CF:ML::ML:PF$, ce qui fait voir que pour déterminer le point P de l'hyperbole sur la ligne indéterminée PF , parallèle à l'asymptote CH , il n'y a qu'à chercher une troisième proportionnelle à l'abscisse CF , & à la constante ML .

COROLLAIRE III.

305. Si l'on prolonge les lignes droites $ML, Ml; mK, mk$ parallèles aux asymptotes, jusqu'à ce qu'elles se coupent aux points $N n$, on aura dans les angles opposés $BCK LCD$, deux parallélogrammes $CkLN CKln$ qui seront évidemment égaux, & que l'on pourra regarder comme les puissances de deux nouvelles hyperboles que l'on décriroit dans ces angles, en cherchant des lignes comme ab , troisièmes proportionnelles à l'abscisse cb , & à la constante nK . Il est visible que l'on peut trouver une infinité de points tels que a , qui auront toujours la même propriété, & qui seront déterminés par la même équation $abxcb=nK^2$. Ces deux hyperboles sont précisément les mêmes courbes que celles que nous examinons. Elles peuvent se décrire de la même manière que les premières, & s'approchent comme elles continuellement de leurs asymptotes sans jamais pouvoir les toucher, puisque jamais la ligne ab ne peut être supposée égale à zéro, sans détruire l'équation qui exprime le rapport des abscisses aux ordonnées. Ces quatres

hyperboles ensembles sont appellées *hyperboles conjuguées* les unes aux autres. Il faut de plus remarquer, que la puissance des hyperboles opposées deux à deux, est la même pour les quatres hyperboles conjuguées, car il est évident, que les parallélogrammes $CLMI$ $CKnl$, sont égaux, & que le lozange $CLMt$ formé sur le côté de la puissance, est la huitième partie du rectangle des deux axes.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

306. Si l'on a deux lignes droites EG IK , qui touchent une hyperbole ou deux hyperboles opposées (fig. 78.) je dis que les triangles KCI ECG , formés par les tangentes & les asymptotes, sont égaux.

DÉMONSTRATION.

Par les points AP de contingence, soient menées les lignes AD , AB , PF , PH parallèles aux asymptotes & terminées aux mêmes lignes. Par la proposition précédente, les parallélogrammes $ABCD$ $CFPH$ sont égaux; mais parceque les tangentes sont coupées en deux également aux points d'attouchement AP , les lignes CI CK feront aussi divisées en deux également par les parallèles PF PH aux points F H , & les lignes CG CE , le feront pareillement aux points B D ; d'où il suit que les parallélogrammes $PFCH$ $ABCD$, sont moitiés

des triangles CIK GGE . Donc ces triangles sont égaux étant doubles de parallélogrammes égaux. $C. Q. F. D.$

COROLLAIRE. I.

307. dans le cas où les points $A P$ sont pris sur une même hyperbole, si des triangles égaux CGE CKI , l'on retranche le quadrilatère commun $CGOK$; les triangles GOI KOE qui resteront, seront aussi égaux; & dans le cas où les points $A P$ sont pris sur des hyperboles opposées, si l'on prolonge les lignes KI GE jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en o , ajoutant aux deux triangles égaux CKI CGE le quadrilatère commun $CGoK$, les triangles oKE oGI qui résulteront de ces additions, seront encore égaux; & comme dans l'un & dans l'autre cas, les triangles ont un angle égal, il faut qu'ils aient les côtés réciproques à l'entour de cet angle. On peut donc établir en général, que si deux tangentes à une hyperbole ou à des hyperboles opposées se rencontrent en un point O ou o , elles se couperont en parties proportionnelles; puisque l'on a $GO : OK :: OE : OI$.

COROLLAIRE II.

308. Si l'on joint les point K , G , E , I , Les triangles KGI , KGE seront égaux, en étant des triangles égaux CGE , CKI . le triangle commun CKG ; & dans le cas où les tan-

gentes appartiennent à des hyperboles opposées en ajoutant aux triangles égaux EKI , CGE , le triangle commun GKC ; on aura aussi les triangles égaux KGI , KGE ; mais ces triangles ont une base commune KG , dont ils sont compris entre parallèles; ainsi les droites EI , KG sont parallèles & donnent $CK:CG::KE:GI$, d'où il suit que si deux tangentes EG , KI rencontrent les asymptotes de l'hyperbole, elles les divisent en parties proportionnelles.

PROPOSITION XXI.

PROBLÈME.

309. Un point quelconque A ou P étant donné sur l'hyperbole mener une tangente à ce point.

SOLUTION.

Par le point A soit menée la ligne AD parallèle à l'asymptote CF , & ensuite sur l'autre asymptote soit prise la partie $ED=DC$; la ligne EAG menée par le point E & le point A , sera la tangente demandée; car puisque $ED=DC$, & que les lignes AD , CG sont parallèles, on aura aussi $AG=AE$, d'où il suit que la ligne EAG est tangente en A , ce qui se démontreroit comme dans la dix-huitième proposition. (art. 297)

PROPOSITION XXII.

THÉOREME.

310. Soit une ligne droite BTA , (Fig. 79.) qui touche une hyperbole & T & d'autres lignes droites EF , IL parallèles entr'elles, & à la tangente BT ; si par le centre C & le point touchant T , on mene un diamètre CT prolongé infiniment au-dedans de l'Hyperbole, je dis que ce diamètre divise toutes les parallèles à la tangente en deux également.

DÉMONSTRATION.

Ayant prolongé les droite EF , IL jusqu'à ce qu'elles rencontrent les asymptotes aux points G , D , M , K ; il est évident que les droites NG , ND , HM , HK , sont égales; car puisque le diamètre CT divise la ligne AB en deux également, il divise aussi les parallèles à la tangente de la même manière: donc si des lignes égales ND , NG , on ôte les parties égales FD , GF , & des autres lignes égales HK , HM , les égales IK , ML , on aura les lignes EN , NF , HL , HI ; qui seront aussi égales. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIII.

THÉOREME.

311. Si par le centre C , on mene une droite MCN parallèle à la tangente BTA , prolongée in-

définiment de part & d'autre, (Fig. 80.) & par les points P, Q de l'une des Hyperboles opposées, les droites Pp, Qq parallèles au diamètre OT qui passe par le point touchant T ; je dis que toutes les parallèles Pp, Qq seront divisées en deux également par la droites MCN .

DÉMONSTRATION.

Soit menée par le point O extrémité du diamètre OT la tangente DOF qui sera parallèle & égale à la tangente BTA , & par les points D, F, A, B les lignes BF, AD , qui seront aussi égales, parallèles au diamètre OT , & terminées aux asymptotes. Cela posé, il est évident que les lignes BF, AD sont divisées en deux parties égales, par la ligne MCN parallèle aux tangentes AB, DF , puisque l'on a $CO=CT$, par la nature des diamètres: donc on aura aussi $FN=BN$ & $MD=AM$; & à cause des triangles semblables CFB, CHh , on aura encore $HS=hS$; donc en ajoutant les parties égales pH, Ph (art. 292.) les lignes PS, pS seront égales, d'où il suit que la ligne Pp est divisée en deux également par la droite MCN . On démontrera la même chose de toute autre ligne Qq ; donc la ligne MN coupe en deux également toutes les parallèles au diamètre OT terminées aux deux hyperboles opposées. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

312. Si l'on prend sur la droite MCN , les parties CM , CN égales entr'elles & aux lignes AT , TB , je dis que les points M , N , seront aux Hyperboles conjuguées aux deux premières.

DÉMONSTRATION.

Par les points O , M , T , N soient menées les droites OM , ON , TM , TN , qui seront parallèles entr'elles, puisque les triangles MCT , NCO sont égaux en tout, ainsi que les triangles OCM , TCN . Il est clair que ces lignes seront coupées en deux également aux points b , f , d , e par les asymptotes, puisqu'elles sont des diagonales des parallélogrammes TN , ON , OM , TM , dont les asymptotes sont aussi diagonales : donc les parallélogrammes $CbNf$, $CbTe$ seront égaux, ainsi que les parallélogrammes $CdMe$, $CdOf$. Cela posé, puisque les points O , T sont aux hyperboles opposées, il faut que l'on ait $Cb \times bT$ ou $Cd \times do$, égale à la puissance de ces hyperboles : donc aussi $Cb \times bN$ ou $Cd \times dM$ est égale à la même puissance, donc les points M , N sont aux hyperboles conjuguées aux premières, puisque la puissance de ces hyperboles est la même que celle des précédentes (art. 305.) C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

313. Il suit de cette proposition que si par un point L de l'une des hyperboles opposées

on mene une droite Ll parallele à l'une des asymptotes, cette droite rencontrera l'hyperbole conjugée à la premiere dans un point l , aussi éloigné du point E que le point L : car puisque le point L est à l'hyperbole LT , on a $CE \times EL = Ce \times eT$, & puisque le point l est supposé à l'une des hyperboles conjuguées, on a $CE \times El = CexeM$, mais $CexeT = CexeM$ comme on vient de voir, donc $CE \times EL = CE \times El$, donc $EL = El$. On voit par là, qu'il est très aisé de décrire les hyperboles conjuguées, lorsque l'on a les deux opposées avec leurs asymptotes.

D É F I N I T I O N.

314. Les lignes OT , MN , ou, si l'on veut une tangente BTA , & le diametre OT , mené par le point touchant T , sont appellés *diametres conjugués* des hyperboles opposées.

C O R O L L A I R E II.

315. Il suit de la dernière proposition & de la définition précédente, que deux diametres conjugués OT , MN de deux hyperboles opposées, sont aussi diametres conjugués des hyperboles conjuguées aux premières, avec cette différence, que le diametre OT , qui est le premier diametre des hyperboles opposées, est le second de leurs conjuguées, & réciproquement le premier diametre MN des hyperboles conjuguées est le second des hyperboles opposées.

C O R O L L A I R E

COROLLAIRE. III.

316. Il suit encore de là, que les hyperboles conjuguées passent par les extrémités de tous les seconds diametres des hyperboles opposées; & réciproquement, que les hyperboles opposées passent par les extrémités de tous les seconds diametres de leurs conjuguées.

PROPOSITION XXV.

317. Tous les parallélogrammes comme $ABFD$, formés sur deux diametres conjugués OT , MN & inscrits aux hyperboles, sont égaux entr'eux. (fig. 80)

DÉMONSTRATION.

Le parallélogramme $CbTe$ est la huitième partie du parallélogramme formé sur les deux diametres conjugués OT , MN & de plus il est égal au parallélogramme $Comn$, formé sur le côté Cn de la puissance de l'hyperbole, puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés réciproques. Ce dernier est aussi la huitième partie du rectangle des deux axes; (art. 305) donc le parallélogramme $ABFD$, inscrit aux hyperboles & formé sur deux diametres conjugués, est égal au rectangle des axes des mêmes hyperboles; on démontrera la même chose d'un parallélogramme formé sur deux diametres conjugués quelconques; donc tous les parallélogrammes inscrits aux hyperboles & formés sur les diametres conjugués sont égaux entr'eux. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVI.

THÉOREME.

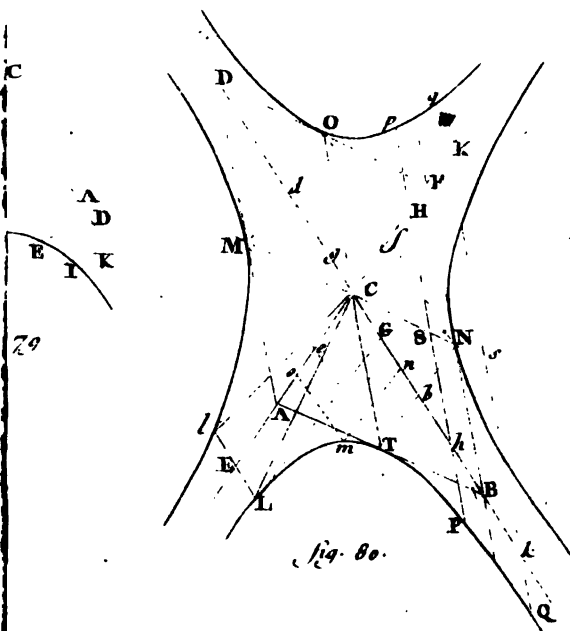
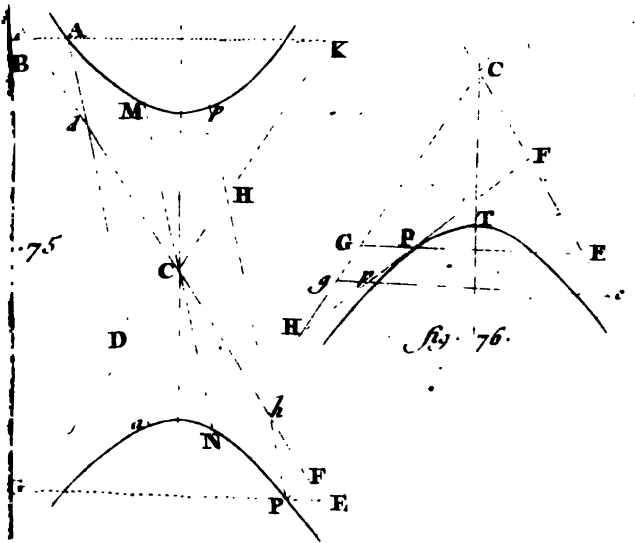
318. Un parallélogramme $ABFD$ étant donné ; trouver les quatre hyperboles conjuguées auxquelles il peut être inscrit.

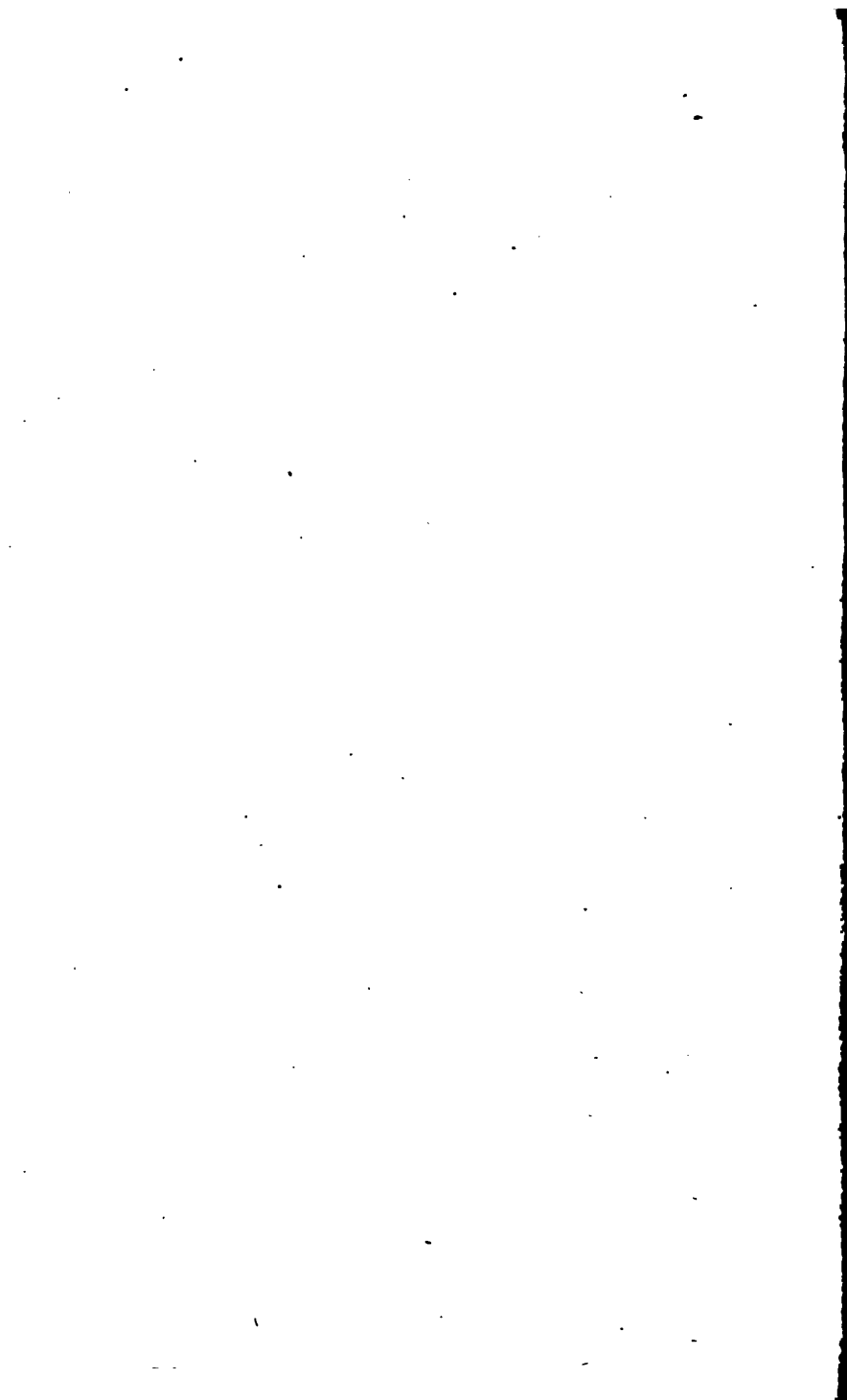
SOLUTION.

Par les angles opposés A, F, B, D du parallélogramme donné, on menera les diagonales BD, AF dont l'intersection donnera le centre C des hyperboles dont ces lignes seront les asymptotes. Par le centre C , & les milieux T, M des droites AB, AD , on menera les droites MCN, OCT terminées aux côtés opposés du parallélogramme : ces lignes seront les diamètres conjugués des hyperboles demandées dont on trouvera tant de points que l'on voudra par le moyen des points T, O, M, N & des asymptotes AF, BD ; comme il sera enseigné dans le livre de la description des sections coniques. Cette solution suit évidemment de ce que l'on a démontré ci-devant.

COROLLAIRE I.

319. Il suit de ce que nous venons de voir & de la solution précédente, qu'autour d'un parallélogramme donné, on ne peut point circonscrire des hyperboles de différentes espèces : car on ne peut trouver qu'une ligne Cx , dont le carré soit égal au rectangle de $CbxbT$,





ou dont le losange soit égal au parallélogramme $CbTe$; qui est la huitième partie du parallélogramme formé sur les diamètres conjugués OT, MN .

COROLLAIRE II.

320. Il suit encore de cette proposition, que par quatre points O, M, T, N qui forment un parallélogramme, on ne peut faire passer qu'une espèce d'hyperboles conjuguées, dont on déterminera les diamètres, en prenant les diagonales OT, MN : cette vérité suit encore des mêmes principes.

DÉFINITIONS.

I.

321. Une droite EN parallèle à une tangente BTA , (fig. 81) terminée d'une part à l'hyperbole & de l'autre au diamètre CT qui passe par le point touchant T , est appelée *ordonnée* au diamètre OT .

II.

322. Les parties ON, TN de ce diamètre comprises entre les extrémités O, N de ce diamètre & la rencontre de l'ordonnée EN , sont appelées *abscisses* ou *coupées* de ce diamètre.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

323. Le carré d'une ordonnée EN à un diamètre déterminé OT (fig. 81) est au rectangle

$ON \times NT$ de ses abscisses ; comme le carré de la tangente TA parallèle à l'ordonnée EN , est au carré du demi diamètre CT .

DÉMONSTRATION.

A cause des parallèles AT, DN , les triangles CTA, CND sont semblables, & donnent $DN^2 : TA^2 :: CN^2 : CT^2$, donc *dividendo* on aura $DN^2 - TA^2 : TA^2 :: CN^2 - CT^2 : CT^2$, & (art. 292)

$$TA^2 = ED \times EG = DN + EN \times DN - EN = DN^2 - EN^2, \text{ donc}$$

$DN^2 - TA^2 = DN^2 - DN^2 + EN^2$: mettant donc EN^2 à la place du premier terme de la dernière proportion, & $ON \times NT$ à la place de $CN^2 - CT^2$ qui lui est égal (par le lemme fondamental) on aura

$$EN^2 : TA^2 :: ON \times NT : CT^2, \text{ \& alternando} \\ EN : ON \times NT :: TA : CT. \text{ C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRE I.

324. Il suit de là que les carrés de deux ordonnées EN , en à un même diamètre sont entr'eux comme les rectangles de leurs abscisses; car on démontrera de la même manière que $en^2 : On \times nT :: TA^2 : CT^2$, & on a pour l'ordonn. $EN, EN^2 : ON \times NT :: TA^2 : CT^2$, donc $EN^2 : en^2 :: ON \times NT : On \times nT$.

COROLLAIRE II.

325. Si les diamètres conjugués sont égaux, ce qui ne peut arriver que dans l'hyperbole équilatère, comme on le démontrera par la

faite, les quarrés des ordonnées seront égaux
 aux produits de leurs abscisses; & partant cha-
 que ordonnée sera moyenne proportionnelle
 entre ses deux abscisses.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÈME.

326. *Ayant mené par le centre C le diamètre
 CM indéfini, parallèle à la tangente BA (fig. 81)
 & conjugué au diamètre OT; si par un point E de
 l'hyperbole, on mene une ordonnée EL parallèle
 au premier diamètre & terminée au second, je
 dis que l'on aura $EL^2 : CM^2 + CL^2 :: CT^2 : CM^2$;
 c'est - à - dire que le quarré d'une ordonnée à un
 second diamètre, est à la somme des quarrés du
 demi diamètre CM & de l'abscisse CL; comme le
 quarré du demi diamètre CT est au quarré du demi-
 diamètre qui lui est conjugué.*

DÉMONSTRATION.

Puisque l'on a par la proposition précédente
 $EN^2 : CN^2 - CT^2 :: TA^2$ ou $CM^2 : CT^2$, on
 aura aussi altern. $EN^2 : CM^2 :: CN^2 - CT^2 : CT^2$.
 & componendo
 $EN^2 + CM^2 : CM^2 :: CN^2 - CT^2 + CT^2 : CT^2$,
 mais $EN^2 = CL^2$ & $CN^2 = EL^2$, donc en subst.
 $CL^2 + CM^2 : CM^2 :: EL^2 : CT^2$ ou bien
 $EL^2 : CT^2 :: CM^2 + CL^2 : CM^2$, & alternando
 $EL^2 : CM^2 + CL^2 :: CT^2 : CM^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE

327. Si l'hyperbole est équilatère, on aura $EL^2 = CM^2 + CL^2$; car nous démontrerons tout à l'heure que tous les diamètres conjugués sont égaux entr'eux deux à deux. On peut encore déduire de cette proposition une manière fort simple de décrire une hyperbole équilatère sur deux diamètres conjugués égaux entr'eux & donnés de position, comme on le verra dans le livre de la description des Sections coniques.

DÉFINITION.

328. Si l'on fait cette proportion continue $OT:Mm::Mm:TP$, (fig. 82) cette troisième proportionnelle est appelée *paramètre* du diamètre qui occupe le premier terme de la proportion ; d'où il suit que le rectangle d'un diamètre par son paramètre est égal au carré de son conjugué.

COROLLAIRE

329. Il suit encore de là, que l'on a $OT^2:Mm^2::OT:TP$, & en prenant le quart des deux premiers termes, $CT:CM^2::OT:TP$, car puisque CT n'est que la moitié de OT & que CM n'est que la moitié de Mm , les carrés CT^2, CM^2 , seront le quart des carrés OT^2, Mm^2 ; & d'ailleurs on sait que dans toute proportion continue, le carré du premier terme est au carré du second, comme le premier au troisième.

PROPOSITION. XXIX

THEOREME.

330. *Ayant élevé à l'extrémité du diamètre OT, la perpendiculaire TP égale au parametre du même diamètre, si l'on fait cette proportion OT:TP::ON:NS, je dis que le quarré de l'ordonnée EN menée par le point N parallèlement au diamètre MGr conjugué au diamètre OT, est égal au produit de son abscisse TN par la ligne NS.*

DÉMONSTRATION.

Par la proposition 17. on a cette proportion ;
 $EN^2 : ON \times TN :: CM^2 : CT^2$ & par la propriété du parametre, (art. 319.)

$$CM^2 : CT^2 :: TP : OT,$$

$$\text{\& par hypothèse} \quad TP : OT :: NS : ON,$$

& en multipliant par la même ligne TN, NS : ON :: NS x TN : ON x TN,
 donc $EN^2 : ON \times TN :: NS \times TN : ON \times TN$, donc $EN^2 = NS \times TN$.

Puisque les conséquents de cette dernière proportion sont égaux. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

331. Si par le point P extrémité du parametre on mene la ligne RPV parallèle au diamètre OT, & par le point S la ligne SL parallèle à la même ligne: il est visible que les triangles PLS, PVO seront semblables, & partant les rectangles OP, PS doubles de ces triangles seront aussi semblables: d'où il suit que le quarré d'une ordonnée quelconque EN à un diamètre OT, surpasse le produit de son abscisse TN par le parametre TP

d'un rectangle PS semblable à celui du diamètre par le même paramètre ; & c'est de cette propriété commune à tous les diamètres que la courbe dont nous traitons a été nommée *hyperbole*.

COROLLAIRE. I.

332. Si le paramètre PT est égal au diamètre OT , il s'en suivra , par la formation du paramètre , que TA ou CM qui lui est égale, (fig. 81) sera égale à CT , & de plus que les asymptotes seront à angles droits ; ou, ce qui revient au même, que l'hyperbole est équilatère ; car la ligne TG parallèle à l'asymptote CB , & menée par le point touchant T divise toujours CA en deux également, puisque le point T , est le milieu de AB . Si donc on suppose $AT=CT$, les triangles CGT , AGT seront égaux en tout, puisque les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre ; donc les angles de suite CGT , AGT sont égaux & valent chacun 90 degrés : donc la ligne TG parallèle à l'asymptote CB , fait un angle droit avec l'asymptote CA ; donc enfin les asymptotes sont à angles droits & les hyperboles sont équilatères.

COROLLAIRE II.

333. Il suit de là que dans une hyperbole qui n'a pas ses asymptotes à angles droits , on ne peut trouver deux diamètres conjugués qui soient égaux. Car dans ce cas,

l'angle AGT ne peut jamais être droit, puisqu'il est toujours égal à celui des asymptotes ; donc les triangles CGT , AGT qui ont des angles inégaux entre les côtés égaux CG , AG & le côté commun TG , auront toujours des bases inégales CT , TA : donc jamais on ne pourra trouver deux diamètres conjugués égaux dans une hyperbole qui n'est pas équilatère ; & au contraire, jamais on ne trouvera dans une hyperbole équilatère des diamètres conjugués inégaux. Toutes ces vérités dérivent du parallélisme des lignes CB , AG dans tous les cas imaginables.

REMARQUE.

L'hyperbole équilatère est par rapport au genre hyperbolique, ce que le cercle est au genre elliptique ; car l'hyperbole est la plus simple de toutes, comme le cercle est aussi la plus simple de toutes les ellipses. Cependant, le rapport n'est pas entièrement parfait, car dans une ellipse quelleconque, on peut toujours déterminer deux diamètres conjugués égaux entr'eux, dont les ordonnées ont conséquemment les propriétés des ordonnées au cercle ; au lieu que dans une hyperbole quelleconque, on ne peut trouver aucuns diamètres conjugués dont l'équation avec leurs ordonnées, soit précisément la même que celle de l'hyperbole équilatère ; comme on vient de le démontrer dans les corollaires précédents.

PROPOSITION XXX.

THÉORÈME.

334. Ayant une tangente DS terminée en S , (fig. 83.) à la rencontre d'un diamètre quelconque CH , si par le centre C des hyperboles conjuguées, on mène un diamètre LCI parallèle à cette tangente; je dis que l'on aura cette proportion $DS^2 : SR \times SH :: CL^2 : CH^2$, c'est à dire que le quarré de la tangente DS est au rectangle des parties SR, SH du diamètre qu'elle rencontre; comme le quarré du demi diamètre CL parallèle à cette tangente, est au quarré du demi diamètre CH , coupé par la même ligne DS .

DÉMONSTRATION:

Par l'origine H du diamètre CH , soit menée parallèlement à la tangente DS l'ordonnée HK au diamètre CD qui passe par le point touchant D . Les triangles CDS , CKH feront évidemment semblables, à cause des parallèles DS , HK , & l'on aura
 $CH^2 : CS^2 :: KH^2 : DS^2$, donc $DS^2 = \frac{KH^2 \times CH^2}{CS^2}$; mais KH étant une ordonnée au diamètre CD , on aura (art. 323.) $KH^2 : CK^2 - CD^2 :: CL^2 : CD^2$ donc $KH^2 = \frac{CK^2 - CD^2}{CD^2} \times CL^2 = \frac{CH^2 - CS^2}{CS^2} \times CL^2$, comme il a été suffisamment expliqué dans l'ellipse (art. 204.). Donc en mettant cette valeur de KH^2 dans celle de DS^2 , on aura
 $DS^2 = \frac{CS^2}{CH^2} \times \frac{CH^2}{CS^2} \times CL^2 - \frac{CS^2}{CH^2} \times \frac{CS^2}{CS^2} \times CL^2 = CL^2 - CS^2 \times \frac{CL^2}{CH^2} = \frac{CL^2 \times CH^2 - CS^2 \times CL^2}{CH^2} = \frac{CL^2}{CH^2} \times (CH^2 - CS^2)$

Donc $DS^2 \times CH^2 = CL^2 \times (CH^2 - CS^2)$, d'où
 l'on tire cette proportion $DS^2 : CH^2 -$
 $CS^2 :: CL^2 : CH^2$; mais par le Lemme fondamental
 $CH^2 - CS^2 = RS \times SH$, donc on aura
 $DS^2 : SR \times SH :: CL^2 : CH^2$. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

335. Si l'on prolonge la tangente DS . jus-
 qu'à ce qu'elle rencontre un diamètre quelconque
 Ch en f , dans l'angle GCF adjacent à l'angle
 GCI dans lequel on a supposé qu'elle coupoit le
 diamètre CH , on aura cette proportion
 $Df^2 : Cf^2 + Ch^2 :: CL^2 : Ch^2$.

DÉMONSTRATION.

Par le point h où le diamètre Ch rencon-
 tre une des hyperboles conjuguées à l'hyperbole
 HD , soit menée l'ordonnée hk au diamètre CD
 qui passe par le point touchant D : cette ligne sera
 parallèle à la tangente DS (art. 321.) & les
 triangles semblables Ckh , CDf donneront
 $Ch^2 : Cf^2 :: kh^2 : Df^2$, donc $Df^2 = \frac{kb^2 \times Cf^2}{Ch^2}$.
 Mais kh étant une ordonnée au second dia-
 mètre CD de l'hyperbole Lh , on aura (num.
 326.) $kh^2 : CD^2 + Ck^2 :: CL^2 : CD^2$, donc
 $kh^2 = \frac{CD^2 + Ck^2}{CD^2} \times CL^2 = \frac{Cf^2 + Ck^2}{Cf^2} \times CL^2$: (voyez
 le numero 204 de l'ellipse.) donc en substi-
 tuant cette valeur dans celle de Df^2 , on aura
 $Df^2 = \frac{Cf^2}{Ch^2} \times CL^2 + \frac{Cf^2 \times Ck^2}{Ch^2 \times Cf^2} \times CL^2 = \frac{Cf^2 \times CL^2}{Ch^2} +$

336

De l'Hyperbole

$CL' = \frac{CL^2 + CH^2}{CL^2} \times CL'$ d'où l'on tire cette proportion $Ds^2 : Cs^2 + Ch^2 :: CL^2 : Ch^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. I.

336. Il suit des deux propositions précédentes, que l'on peut regarder comme un seul & même théorème, que si une tangente quelconque DS rencontre un diamètre quelconque CH dans un point H ou h (fig. 84, 85, 86, 87, 88, 86) on aura toujours cette proportion $DS^2 : CH^2 + CS^2 :: CL^2 : CH^2$ c'est-à-dire, que le quarré d'une tangente DS prise depuis le point touchant jusqu'à la rencontre d'un diamètre quelconque; est à la différence, ou à la somme des quarrés de ce demi diamètre & de la distance du centre C au point de rencontre S ; comme le quarré du demi diamètre parallèle à cette tangente; est au quarré du même demi diamètre coupé par la tangente; la différence, lorsque le diamètre CH appartient aux hyperboles auxquelles DS est tangente; & la somme, lorsqu'il se termine aux hyperboles conjuguées à celle à laquelle on a menée la tangente.

COROLLAIRE II.

337. Si les diamètres CH , CL sont égaux, la tangente sera moyenne proportionnelle, entre les parties RS , SH dans le cas de la proposition trentième, & dans celui de la trente-unième, on aura $CH^2 + CS^2 = DS^2$. D'où il suit qu'avec la tangente DS & les parties CH , CS , on pourra toujours former un triangle rectangle.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

338. Si deux lignes droites AB, MN terminées à une même hyperbole, (fig. 84. & 85.) ou à des hyperboles opposées, (fig. 86, 87, 88) se rencontrent en un point O audehors ou audehors de ces hyperboles, & que par le centre C, on mene parallèlement aux mêmes sécantes les diametres CL, CE; je dis que l'on aura toujours $AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$, c'est-à-dire que les produits de deux sécantes quellesconques intérieures ou extérieures, sont entr'eux comme les quarrés des diametres qui leur sont paralleles.

DÉMONSTRATION.

Nous allons d'abord démontrer cette proposition sur les figures 84 & 85, nous averons des changemens qu'il y a à faire sur les autres figures pour trouver la démonstration du théorème, qui est à peu près la même dans tous les cas imaginables.

Par le point F milieu de la sécante AB & le centre C, soit mené le diametre CDF, au point D origine du diametre CD, soit menée la tangente DS parallèle à son conjugué CL, & terminée en S au diametre qui passe par le point O d'intersection des sécantes. Cela posé, puisque la ligne AB est divisée en deux parties égales en F & en deux parties inégales en O, on aura (par le lemme fond.)

$AO \times OB = BF^2 - FO^2$ (fig. 84.) ou $FO^2 = BF^2$ (fig. 85.): BF étant une ordonnée au diamètre CD , on aura $BF^2 : CF^2 = CD^2 : CL^2$, donc $BF^2 = \frac{CF^2 - CD^2}{CD^2} \times CL^2 = \frac{CO^2 - CS^2}{CS^2} \times CL^2$ (num 206 de l'ellipse) ou $BF^2 = \frac{CO^2 \times CL^2}{CS^2} - CL^2$

Pour avoir OF , on se servira des triangles semblables CFO CDS qui donnent $CS^2 : CO^2 :: DS^2$ ou (n. 334.) $\frac{CL^2}{CH^2} \times (CH^2 - CS^2) : FO^2$ d'où l'on tire $FO^2 = \frac{CO^2 \times CL^2}{CS^2} - \frac{CO^2 \times COL^2}{CH^2}$, donc $BF^2 - FO^2 = \frac{CO^2 \times CL^2}{CS^2} - CL^2 - \frac{CO^2 \times COL^2}{CH^2} + \frac{CH^2 \times COL^2}{CH^2}$, ou en effaçant ce qui se détruit, & réduisant CL^2 à la même dénomination que le dernier terme, $BF^2 - FO^2$ ou $AO \times OB = \frac{CO^2 - CH^2}{CH^2} \times CL^2$. Si l'on avoit retranché BF^2 de FO^2 , on auroit eu $AO \times OB = \frac{CH^2 - CO^2}{CH^2} \times CL^2$, d'où l'on déduit cette proportion pour les sécantes intérieures & extérieures, $AO \times OB : CL^2 :: CH^2 - CO^2$ ou $CO^2 - CH^2 = RO \times OH : CH^2$. on démontrera de la même manière que $MO \times ON : CE^2 :: RO \times OH : CH^2$ donc $AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$. C. Q. F. D.

OBSERVATIONS.

339. 1^o Si l'une des sécantes MN (fig. 86.) est terminée à une seule hyperbole, & rencontrée au-dedans de cette hyperbole par une droite AB , terminée à cette même hyperbole & à son opposée : comme alors la tangente DS parallèle à la sécante AB , vient couper un des seconds diamètres de l'hyperbole à laquelle elle est tangente, on aura (art. 336)

$DS^2 = \frac{CH^2 + CS^2}{CH^2} \times CL^2$. On se servira de même de cette valeur pour trouver FO^2 par le moyen des triangles semblables CDS, CFO ; de plus comme BF est une ordonnée extérieure, on aura (art 326) $BF^2 : CD^2 + CF^2 :: CL^2 : CD^2$, donc $BF^2 = \frac{CD^2 + CF^2}{CD^2} \times CL^2$; ainsi en se servant des proportionnelles CS^2 & CO^2 , il faudra prendre pour la valeur de BF^2 , $\frac{CS^2 + CO^2}{CS^2} \times CL^2$, & l'on trouvera par ce moyen $AO \times OB : CL^2 :: RO \times OH : CH^2$. Pour la sécante MN , on trouvera la valeur de MG^2 & de GO^2 comme dans le cas de la figure 84.

2°. Si les sécantes AB, MN appartiennent à des hyperboles opposées, & se coupent au dehors des mêmes hyperboles; (fig. 87) ayant menée la tangente DS qui rencontre un des seconds diamètres de l'hyperbole BDA , on aura $DS^2 = \frac{CH^2 + CS^2}{CH^2} \times CL^2$ (num 336) dont on se servira de la même manière pour trouver le carré de OF , & l'on trouvera $OF^2 - BF^2$, ou $AO \times OB : CL^2 :: CO^2 + CH^2 : CH^2$, au lieu que dans les figures précédentes on avoit $CO^2 - CH^2$ ou $CH^2 - CO^2$. On trouvera de même en suivant les mêmes observations, $GO^2 - GN^2$, ou $MO \times ON : CE^2 :: CO^2 + CH^2 : CH^2$ d'où l'on conclura encore que $AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$.

3°. Si les sécantes AB, MN (fig. 88) sont terminées l'une & l'autre à des hyperboles opposées; par le point D extrémité du diamètre qui divise AB en deux également en F ,

on menera la tangente DS , terminée en S au diamètre CH qui passe par le point d'intersection O ; & l'on aura comme dans les figures 84 & 85, $DS^2 = \frac{CH^2 - CS^2}{CH^2} \times CL^2$: après avoir trouvé par son moyen la valeur de OF^2 & l'expression de BF^2 ordonnée extérieure à l'une des hyperboles, en suivant ce qui a été dit dans la première observation ; on aura $AO \times OB : CL^2 :: CO^2 + CH^2 : CH^2$, on trouvera de la même manière $MO \times ON : CE^2 :: CO^2 + CH^2 : CH^2$, donc on aura encore dans ce cas $AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$

4°. Si l'une des sécantes AB (fig. 89) est terminée à deux hyperboles opposées & la sécante MN à ses deux conjuguées, on ne pourra plus trouver la proportion énoncée au théorème; mais après avoir divisé les sécantes AB , MN en deux parties égales aux points F , G , & tiré les diamètres CL , CE parallèles à ces mêmes lignes, on auroit cette autre analogie $BF^2 - FO^2 : MG^2 + GO^2 :: CL^2 : CE^2$; car on trouvera en suivant toutes les observations précédentes, $BF^2 - FO^2 : CL^2 :: CH^2 + CO^2 : CH^2$ & cette autre proportion $MG^2 + HO^2 : CE^2 :: CH^2 + CO^2 : CH^2$, d'où il suit qu'on aura $BF^2 - FO^2 : MG^2 + GO^2 :: CL^2 : CE^2$.

COROLLAIRE I

Si l'on suppose que les sécantes AB , MN (fig. 84) se meuvent parallèlement à elles-mêmes jusqu'à ce qu'elles deviennent tangentes en

en I & D , à l'origine des diamètres qui les divisent en deux également, & qu'elles se coupent dans un point T ; les rectangles $AO \times OB$, $MO \times ON$ deviendront les quarrés des tangentes IT, DT : on aura donc $DT^2 : IT^2 :: CL^2 : CE^2$, mais nous avons, par la proposition précédente, $AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$; on aura donc aussi pour les sécantes intérieures & extérieures, $AO \times OB : MO \times ON :: DT^2 : IT^2$; c'est-à-dire, que les rectangles de deux sécantes quelconques AB, MN sont entr'eux comme les quarrés des tangentes DT, IT qui leur sont parallèles, prises depuis l'origine des diamètres qui divisent les parties intérieures de ces sécantes en deux également, jusqu'au point T où elles se rencontrent. D'où l'on voit que cette propriété convient à toutes les sections coniques par les articles 83 de la parabole & 207 de l'ellipse.

COROLLAIRE II.

398. Si l'une des sécantes AB par exemple, (fig. 85 & 87) se meut parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle devienne tangente en D ; il est évident que les points A, B s'approchent toujours l'un de l'autre, & qu'enfin ils se confondent en un seul & même point D : alors le rectangle $AO \times OB$, devient le quarré de Do ; on aura donc $Do^2 : Mo \times ON :: CL^2 : CE^2$. D'où il suit que si les diamètres CL, CE sont égaux entr'eux

la tangente *Do* sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière & la partie extérieure : Ainsi cette propriété, qui est une des principales du cercle, est commune à toutes les sections coniques ; & elle n'est universelle dans le cercle, que parce que tous les diamètres sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE. III.

342. Si l'on imagine que l'une des sécantes comme *AB* (fig. 86) passe par le centre, & devienne un diamètre qui divise l'autre sécante *MN* en deux parties égales ; cette ligne *MN* deviendra une double ordonnée au diamètre qui la divise en deux également ; le rectangle *AOxOB* deviendra celui des abscisses ; le rectangle *MQxON* deviendra le carré de l'ordonnée ; le diamètre *CE* parallèle à *MN*, sera conjugué à celui qui divise *MN* en deux parties égales ; & le diamètre parallèle à ce dernier, sera ce diamètre lui-même : on aura donc ; le carré d'une ordonnée à un diamètre quelconque est au produit de ses abscisses, comme le carré du diamètre parallèle à l'ordonnée, est au carré de son conjugué.

COROLLAIRE IV.

343. Nous avons vu par le dernier article des observations du num. 339, que l'on a (fig. 89) $BF^2 - FO^2 : MG^2 + GO^2 :: CL^2 : CE^2$. Si l'on suppose que la ligne *MN* passe par

le centre & divise la droite AB en deux également; cette ligne AB sera une double ordonnée à la ligne MN devenue diametre: comme la partie FO est égale à zero, on aura BF^2 à la place de $BF^2 - FO^2$; les parties MO & ON , deviendront les parties DF , Fd , & la somme des quarrés des lignes MG , GO sera celle des quarrés CD^2 , CF^2 ; enfin le diametre parallèle à CD sera CD lui-même; le diametre CL parallèle à AB sera CL conjugué à CD : on aura donc $BF^2:CD^2 + CF^2::CL^2:CD^2$; d'où il suit que cette dernière observation renferme la proposition la plus générale que l'on puisse donner sur l'hyperbole, en la déterminant par des ordonnées extérieures à cette courbe. On voit de même, dans la figure 86, ce que l'on peut établir de plus général sur les ordonnées intérieures à la même courbe; puisqu'en simplifiant les deux rapports contenus dans cette proportion, on retrouve les équations aux premiers diametres dont nous sommes partis.

COROLLAIRE V.

344. Il suit encore du dernier article des observations du même n°. 339, que si deux lignes droites AB , mn , (fig. 89) se coupent dans un point o sur l'une des asymptotes, & se terminent aux hyperboles opposées; on aura encore cette proportion: $AoxoB:moxen::CL^2:CE^2$: car on peut considérer l'asymptote C comme un diametre commun à chacune des hyperboles

opposées; & l'on voit aisément que les rectangles $AoxoB$, $moxon$, ont avec les quarrés des diametres CL , CE qui leur sont parallèles, le même rapport qui se trouve entre le rectangle $chxi$ des parties de l'asymptote & le quarré ch^2 de la même asymptote prise depuis le centre jusqu'à l'infini; où l'on doit supposer le point h . Comme ces raisons pourroient paroître un peu trop abstraites, nous allons en donner une démonstration complete.

Nous supposons que par les points F , g milieux des sécantes AB , mn , on a mené les diametres CFD , CgI , & par le point D origine du diametre FD la tangente Ds parallèle à la sécante AB , terminée en s à l'asymptote Ds ; nous supposons de plus, comme dans la proposition précédente, les diametres CL , CE terminés aux hyperboles & parallèles aux sécantes proposées.

. En considérant l'asymptote Ch comme le dernier de tous les diametres possibles, & supposant le point h à l'infini; puisque nous avons démontré que l'on avoit en général pour une tangente quelconque terminée à un diametre CH ; $DS^2 : CH^2 - CS^2 :: CL^2 : CH^2$, cette proportion se trouvera encore vraie dans le cas que nous supposons; c'est-à-dire que l'on aura $Df^2 : Ch^2 - Cf^2 :: CL^2 : Ch^2$. Dans cette proportion, je fais attention que Ch étant une grandeur infinie en comparaison de Cf qui est une grandeur finie, cette quantité devient nulle vis-à-vis de Ch ; donc la proportion

se réduit à celle-ci $Df^2:Ch^2::CL^2:Ch^2$, mais $Ch^2=Ch^2$, donc aussi $Df^2=CL^2$, c'est ce que l'on sçait déjà par l'article 298. BF étant une ordonnée extérieure à l'hyperbole BI , on aura $BF^2:CF^2+CD^2::CL^2:CD^2$, donc $BF^2=\frac{CF^2+CD^2}{CD^2}\times CL^2=\frac{Ce^2+Cf^2}{Cf^2}\times CL^2$, par les mêmes raisons que nous avons donné ci - devant ; & à cause des triangles semblables CDf , CFo on aura $Cf^2:Co^2::Df^2$ ou $CL^2:Fo^2=\frac{Ce^2\times Co^2}{Cf^2}$; donc BF^2-Fo^2 ou $Ao\times oB=\frac{Ce^2\times CL^2}{Cf^2}+CL^2-\frac{CL^2\times Co^2}{Cf^2}=CL^2$: on fera voir de même que $mo\times on=CE^2$, donc on aura $Ao\times oB:mo\times on::CL^2:CE^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE VI.

345. Il suit du dernier corollaire, que cette proposition renferme nonseulement les propriétés des hyperboles par rapport aux diametres, mais encore celles des mêmes hyperboles considérées entre leurs asymptotes; en sorte qu'elle réunit pour ainsi-dire, en elle-même, toutes les propriétés des hyperboles, quelque soit l'angle des asymptotes.

N. B. On auroit pu démontrer le corollaire V. sans aucun calcul, en se servant de la prop. 17. Mais comme cette proposition n'est elle même qu'un cas particulier des deux précédentes, j'ai crû qu'on verroit avec plaisir une démonstration directe de cette propriété des asymptotes considérées comme des diametres communs aux hyperboles conjuguées.

PROPOSITION XXXIIL

THÉORÈME.

346. Si deux lignes droites IT , RS terminées

aux asymptotes (fig. 90) se coupent dans un point O , au-dedans des hyperboles, je dis que l'on aura cette proportion $IO \times OT : RO \times OS :: CL^2 : CE^2$, en supposant que CL , CE sont des diametres parallèles à ces sécantes, que nous appellerons sécantes asymptotiques, pour les distinguer des sécantes AB , MN terminées aux hyperboles, & que l'on peut nommer des sécantes hyperboliques.

DÉMONSTRATION.

Par le point A , où l'une des sécantes rencontre l'hyperbole, soit menée une ligne PAQ , parallèle à l'autre sécante RS ; les triangles IAP , IOR seront semblables, ainsi que les triangles AQT , OST , à cause des parallèles PQ , RS : ces triangles donnent les deux proportions suivantes. Les premiers donnent $IA : IO :: AP : RO$. & les seconds $AT : OT :: AQ : OS$. donc en les multipliant par ordre, on aura $IA \times AT : IO \times OT :: AP \times AQ : RO \times OS$ mais $IA \times AT = DK^2$, en supposant que DK est tangente au point D origine du diametre CF qui divise IT en deux également au point F ; & de même $AP \times AQ = NH^2$, en supposant les mêmes conditions pour NH : de plus, (art. 314) les tangentes DK , NH sont égales aux demidiametres CL , CE parallèles à ces tangentes, & conjugués aux diametres CD , CN ; on aura donc $IA \times AT = CL^2$ & $AP \times AQ = CE^2$ donc en mettant ces quarrés à la place des rectangles qui leur sont égaux, on aura $IO \times OT : RO \times OS :: CL^2 : CE^2$. C. Q. F. D.

Ce seroit la même chose, si l'une des sécantes *IT* étoit disposée de manière qu'elle rencontrât les deux hyperboles opposées; car les triangles *IAP*, *IOR*, *AQT*, seront toujours semblables, & donneront les mêmes proportions.

COROLLAIRE I.

347. Les parties *AB*, *MN* des sécantes *IT*, *RS* étant des sécantes hyperboliques, on aura par la proposition précédente

$AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$, & nous avons $IO \times OT : RO \times OS :: CL^2 : CE^2$; donc on aura $AO \times OB : MO \times ON :: IO \times OT : RO \times OS$. D'où il suit que les produits de deux sécantes hyperboliques quelconques sont entr'eux comme les produits de deux sécantes asymptotiques parallèles aux premières.

COROLLAIRE II.

348. Si les deux sécantes *IT*, *RS* devenues toutes deux tangentes, l'une en *D* & l'autre en *F* (fig. 91) se coupent dans un point *O*, on aura toujours

$IO \times OT : RO \times OS :: CE^2 : CL^2 :: FT^2 : DS^2$, puisque les diamètres *CE*, *CL* sont égaux aux tangentes *FT*, *DS* prises depuis le point d'attouchement jusqu'à l'asymptote. D'où l'on voit que les propriétés des sécantes asymptotiques sont les mêmes que celles des sécantes hyperboliques. On peut démontrer ce corollaire directement de la même manière que l'on a démontré la

proposition. Par le point F milieu de la tangente IT , soit menée la ligne PFQ parallèle à la tangente RS . Les triangles IOR , IFP sont semblables, ainsi que les triangles TOS , TFQ ; les premiers donnent la proportion suivante $IO : OR :: IF : FP$, & les seconds donnent celle-ci $OT : OS :: FT : FQ$; donc en multipliant par ordre, $IO \times OT : OR \times OS :: IF \times FT : FP \times FQ$; mais $IF \times FT = FT^2$, puisque la tangente est divisée en deux également en F , & ('num. 298.) $FP \times FQ = DS^2$, donc en substituant on aura $IO \times OT : OR \times OS :: FT^2 : DS^2 :: CE^2 : CL^2$.

COROLLAIRE III.

349. Puisque les tangentes IT , RS sont divisées en deux également aux points F , D & en deux parties inégales au point O ; on aura par le Lem. fond., $IO \times OT = FT^2 - FO^2$, & $RO \times OS = DR^2 - DO^2$, donc en substituant ces valeurs dans la dernière proportion du corollaire précédent, on aura $FT^2 - FO^2 : DR^2 - DO^2 :: FT^2 : DS^2$ ou DR^2 ; d'où l'on déduit en faisant un *alternando* & ensuite un *detrahendo* $FT^2 : FT^2 - FT^2 + FO^2 :: DR^2 : DR^2 - DR^2 + DO^2$, réduisant & tirant les racines $FT : FO :: DR : DO$. & *componendo*: $FT + FO : FO :: DR + DO : DO$, & *dividendo*, $FT - FO : FO :: DR - DO : DO$, donc puisque les conséquents de ces deux proportions sont égaux; on aura $FT + FO : FT - FO :: DR + DO : DR - DO$, réduis. $IO : OT :: OS : OR$; mais les triangles OTS , ORI , ont un angle égal en O ,

compris entre côtés réciproques ; donc ils sont égaux : donc en leur ajoutant le quadrilatere *CROT* ; les triangles *CRS*, *CTI* seront égaux ; d'où il suit que les triangles formés par deux tangentes quelconques & les asymptotes sont toujours égaux entr'eux. C'est ce que nous avons déjà démontré (num. 306). Si les tangentes appartiennent à des hyperboles opposées , il faudra des triangles égaux *oRI*, *oTS* ôter le quadrilatere commun *TCRo*, pour en conclure l'égalité des triangles *CTI*, *CRS*. Il suit encore de cette proposition, ou du corollaire présent, que tous les parallélogrammes inscrits aux hyperboles & formés sur deux diametres conjugués, sont égaux entr'eux , & au rectangle des deux axes.

R E M A R Q U E.

350. On pourroit encore déduire de cette proposition beaucoup d'autres corollaires & en faire usage pour trouver une hyperbole qui passât par plusieurs points donnés & dont les diametres seroient entr'eux dans des rapports déterminés ; mais comme nous avons déjà fait voir sur l'ellipse l'usage de cette proposition, dans la solution des problèmes de ce genre, nous ne les répéterons pas ici, d'autant que nous avons encore à examiner d'autres propriétés de l'hyperbole , qui ne sont pas moins curieuses que ce qu'on auroit pu dire sur cette matiere , & qu'un plus long détail paroîtroit peut-être inutile dans des éléments.

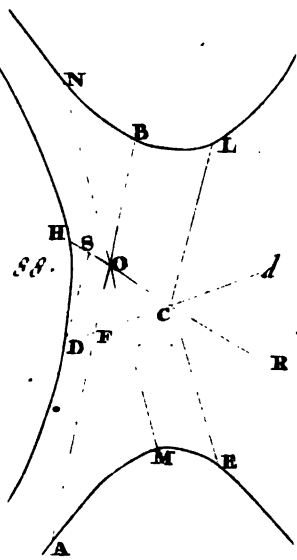
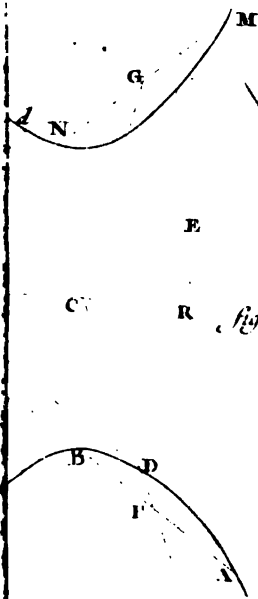
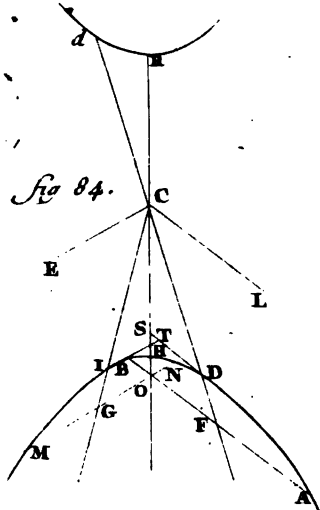
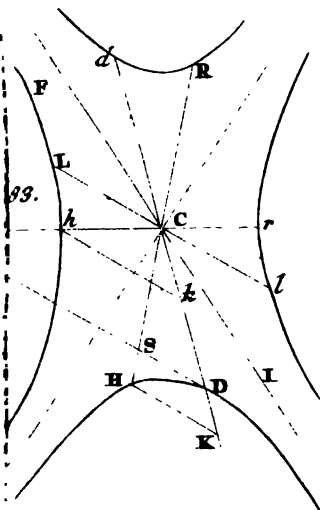
PROPOSITION XXXIV.

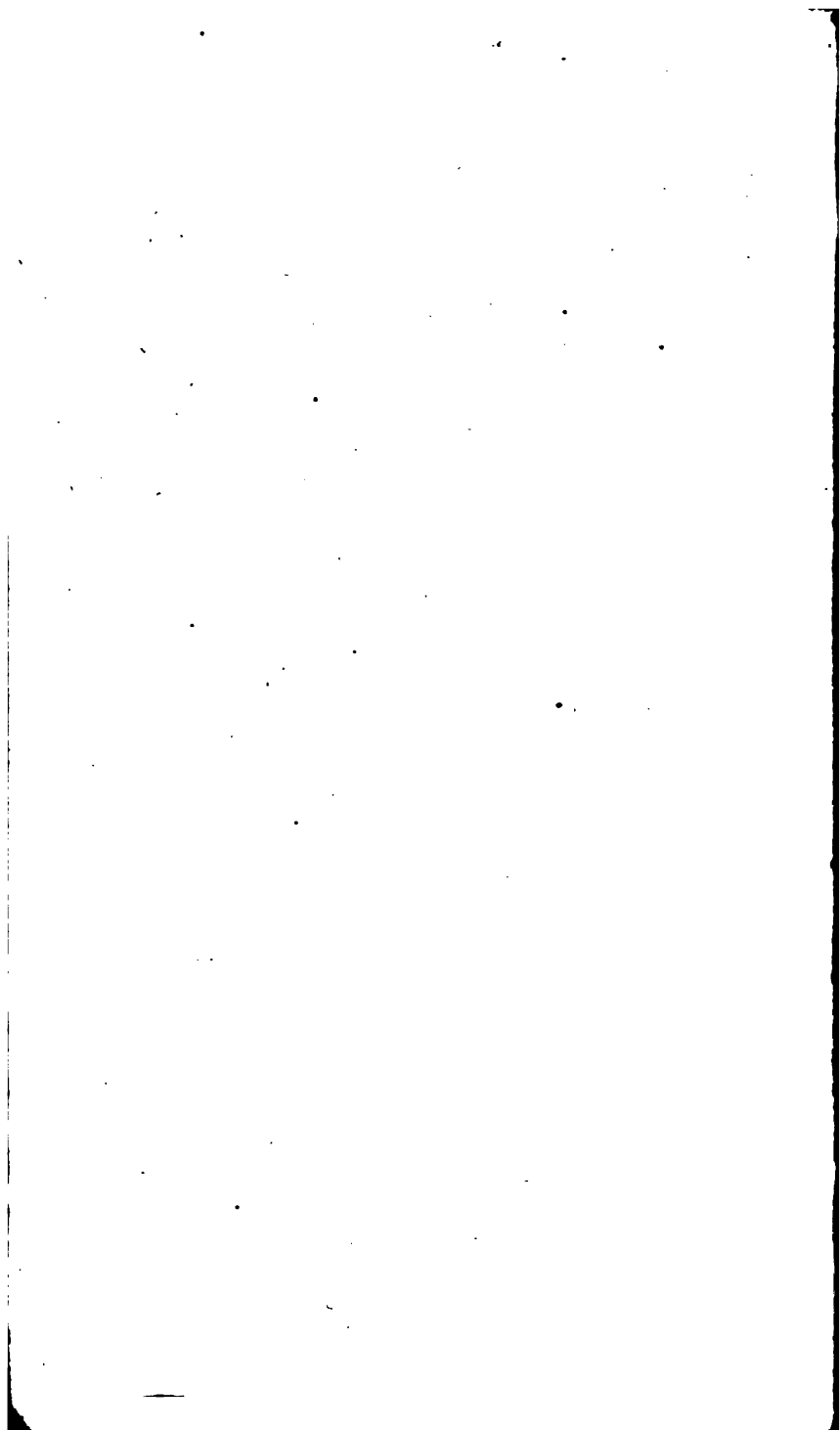
THEOREME.

351. Si par un point P de l'une des hyperboles opposées, on mène une ordonnée PO à un diamètre de la même hyperbole, & une tangente PH qui rencontre ce diamètre en H , je dis que l'on aura toujours cette proportion $CO : CT :: CT : CH$.

DÉMONSTRATION.

Soit prolongée l'ordonnée PO , jusqu'à ce qu'elle rencontre l'hyperbole en p ; par le point T origine du diamètre CT , soit menée l'ordonnée TG aussi prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre l'hyperbole en t , & par le même point T soit menée la tangente TK , terminée au diamètre CP en K . Cette tangente coupera la tangente PH dans un point S ; les lignes Tt , Pp étant des sécantes intérieures à l'hyperbole qui se coupent en D , on aura (*art. 340*) $GT^2 - GD^2$ ou $TD \times Dt : PO^2 - OD^2$ ou $PD \times Dp :: PS^2 : TS^2$; mais les lignes PS , TD étant parallèles, ainsi que les lignes TS , PD ; $DPST$ est un parallélogramme: donc $PS = TD$ & $TS = PD$, on aura donc $DT \times Dt : PD \times Dp :: DT^2 : PD^2$, & divisant les deux antécédents par DT , & les deux conséquents par PD , $Dt : Dp :: DT : PD$, donc $Dt + DT : Dp + DP :: DT : PD$ ou $tT : Pp :: DT : PD$ & prenant la moitié des deux premiers termes $TG : PO :: DT : PD$, & *alternando* $TG : DT :: PO : PD$, & *dividendo*





$TG - DT : DT :: PO - PD : PD$; en réduisant on trouve $DG : DT :: DO : PD$, d'où il suit que les triangles PDG, TDO sont égaux , puisqu'ils ont un angle égal D , compris entre côtés réciproques ; donc en leur ajoutant le triangle commun DOG , les triangles POG, TOG appuyés sur même base OG , seront égaux ; donc ils sont compris entre parallèles ; donc on aura , à cause des parallèles PT, OG , $CO : CT :: CG : CP$, & à cause des parallèles TG, PH , $CG : CP :: CT : CH$; donc $CO : CT :: CT : CH$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

352. Puisque l'on a $CO : CT :: CT : CH$; donc $CH = \frac{CT^2}{CO}$ & partant OH ou $CO - CH = CO - \frac{CT^2}{CO} = \frac{CO^2 - CT^2}{CO}$; d'où l'on tire cette analogie , $CO : CO + CT :: CO - CT : CH$. Si l'on suppose que l'abscisse CO soit infiniment grande , & le demidiаметre CT d'une grandeur finie , la valeur de OH devient $\frac{CO^2}{CO} = CO$; puisque CT^2 étant le quarré d'une grandeur finie , n'est rien par rapport au quarré de CO que l'on suppose infini : d'où il suit que lorsque la tangente ne rencontre l'hyperbole qu'à l'infini , le point H tombe sur le point C , & par conséquent cette tangente devient l'asymptote de la courbe. On peut encore déduire cette vérité de la première proportion , $CO : CT :: CT : CH$; car si l'on suppose que CO soit infiniment grande par rapport à CT , CT sera aussi infiniment grande par

rapport à CH , donc le point H n'est pas différent du point C .

COROLLAIRE II.

353. Donc toutes les tangentes que l'on peut mener à l'hyperbole, se trouvent renfermées depuis le centre C jusqu'au point T origine d'un diamètre quelconque : c'est-à-dire que jamais une tangente ne pourra rencontrer un diamètre au-de-là du centre C . Les diamètres dont il s'agit ici sont les premiers diamètres de l'hyperbole à laquelle on suppose que la tangente a été menée.

COROLLAIRE III.

354. Puisque $CO:CT::CT:CH$, donc *invertendo* $CH:CT::CT:CO$, & *componendo* $CT+CH:CT::CO+CT:CQ$ & *dividendo* $CT-CH:CT::CO-CT:CO$; donc $CT+CH:CT-CH::CO+CT:CO-CT$ & *reduisant* $IH : HT :: IO : OT$.

d'où il suit que la ligne IO est coupée en proportion harmonique aux points H, T ; puisque la plus grande partie IO , est à la plus petite IH , comme l'excès OT , de la plus grande sur la moyenne, est à l'excès HT de la moyenne sur la plus petite.

PROPOSITION XXXV.

THÉORÈME.

355. Si par un point P d'une hyperbole, (fig. 93) on mène une ordonnée Po , à un second dia-

metre Ct , & une tangente Ph terminée au même diamètre prolongé autant qu'il est nécessaire, je dis que l'on aura $Co : Ct :: Ct : Ch$.

DÉMONSTRATION.

Par le centre C , soit mené le diamètre CT parallèle à l'ordonnée Po , & par conséquent conjugué au diamètre Ct ; lequel rencontre la tangente Ph , dans un point H : par le point P soit encore menée au diamètre CT l'ordonnée PO , qui sera parallèle au diamètre Ct : à cause du parallélogramme $COPo$, on pourra prendre Co à la place de PO , & Po à la place de CO : il est de plus évident que les triangles POH , hCH sont semblables, à cause des parallèles Ch , PO ; donc on aura $OH : PO$ ou $Co :: CH : Ch$, donc $Ch = \frac{CH \times Co}{OH}$, mais (num 352.) $CH = \frac{CT^2}{CO}$ & $OH = \frac{CO^2 - CT^2}{CO}$, donc en substituant ces valeurs on aura $Ch = \frac{\frac{CT^2 \times Co}{CO}}{\frac{CO^2 - CT^2}{CO}} = \frac{CT^2 \times Co}{CO^2 - CT^2}$: mais CO^2 ou Po^2 qui lui est égale, étant une ordonnée extérieure à l'hyperbole, on aura CO^2 ou $Po^2 = CT^2 + \frac{Co^2 \times CT^2}{Ct^2}$ donc $Ch = \frac{CT^2 \times Co}{CT^2 + \frac{Co^2 \times CT^2}{Ct^2} - CT^2} = \frac{CT^2 \times Co^2}{\frac{Co^2 \times CT^2}{Ct^2}} = \frac{Ct^2}{Co}$ en réduisant, d'où l'on tire $Co : Ct :: Ct : Ch$. C. Q. F. D.

DÉFINITION.

356. La ligne OH ou oh comprise entre la rencontre d'une ordonnée PO , & la tangente PH , menée par l'extrémité de cette ordonnée

le même plan ; mener par ce point une tangente à l'hyperbole. (fig. 93)

SOLUTION.

Par le centre C , & le point donné H , on mènera un diamètre CHT , qui rencontrera l'hyperbole dans un point T . Sur ce diamètre prolongé autant qu'il sera nécessaire, on prendra une partie CO telle que l'on ait . . . $CH : CT :: CT : CO$; par le point O , l'on mènera une double ordonnée OP au diamètre CO , dont les points P, p détermineront les points d'attouchement des tangentes que l'on cherche ; pour avoir l'angle des ordonnées, par le point T , on mènera une ligne TR parallèle à l'une des asymptotes CF , on prendra ensuite la partie DR égale à CR , & l'on mènera la droite DTF qui sera tangente en T , (art. 309.) & par conséquent déterminera l'angle des ordonnées. Ainsi l'on n'aura qu'à mener par le point O la droite POp parallèle à DE , pour avoir les points P, p avec toute la précision possible. Ce seroit à peu près la même solution, si le point H se trouvoit en k , dans l'angle d'une des hyperboles conjuguées : alors, une tangente seroit terminée à une hyperbole, & l'autre seroit terminée à son opposée. Cette solution porte sa démonstration avec elle, & suit entièrement des principes que nous avons établis.

PROPOSITION

PROPOSITION XXXVII.

362. Supposant toutes choses comme dans la 35eme. proposition; si par l'extrémité T d'un diametre, on mene la tangente TA parallèle à l'ordonnée PO du diametre CT, laquelle coupe la tangente PH en S, & se termine à l'une des asymptotes en A, je dis que l'on aura toujours cette proportion $CO + CT : CO - CT :: TA^2 : TS^2$ (fig. 94).

DÉMONSTRATION.

A cause des parallèles PO, TS les triangles POH, STH sont semblables, & donnent $OH^2 : PO^2 :: TH^2 : TS^2$, mais (art. 360) $OH = \frac{CO^2 - CT^2}{CO}$, donc $OH^2 = \frac{(CO^2 - CT^2)^2}{CO^2}$; PO^2 étant le quarré de l'ordonnée PO; on aura $PO^2 = \frac{CO^2 - CT^2}{CT^2} \times TA^2$; on aura aussi $TH = CT - CH = CT - \frac{CT^2}{CO} = \frac{CT \times CO - CT^2}{CO}$ donc $TH^2 = \frac{CT^2 \times CO^2 - CT^2}{CO^2}$ enfin; $TS^2 = TS^2$: donc en substituant ces valeurs à la place des premieres; la proportion précédente devient celle-ci. $\frac{CO^2 - CT^2}{CO^2} : \frac{CO^2 - CT^2}{CT^2} \times TA^2 :: \frac{CT^2 \times CO^2 - CT^2}{CO^2} : TS^2$. Divisant les deux premiers termes par $CO^2 - CT^2$, & multipliant les deux antécédents par la même quantité CO^2 , elle deviendra celle-ci. $CO^2 - CT^2 : \frac{CT^2}{CT^2} :: CT^2 \times CO - CT^2 : TS^2$; divisant encore les deux antécédents par $CO - CT$, & multipliant le premier & le second terme par CT^2 , on aura $CT^2 \times (CO + CT) : TA^2 :: CT^2 \times (CO - CT) : TS^2$, ou, en divisant les deux

antécédents par CT^2 , & alternant $CO + CT : CO - CT :: TA : TS$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

363. Si l'on suppose que l'abscisse CO devienne infiniment grande, les deux premiers termes $CO + CT$, $CO - CT$ deviennent égaux; puisqu'une quantité finie ne peut diminuer ou augmenter l'infini, de quelque manière qu'elle soit combinée avec lui, par addition ou par soustraction: donc $TS^2 = TA^2$; d'où il suit que lorsque la tangente PH ne rencontre l'hyperbole qu'à l'infini, elle passe par l'extrémité de tous les seconds diamètres: d'ailleurs nous avons vu (num. 360.) qu'une pareille tangente passe aussi par le centre de l'hyperbole; donc cette tangente ne peut être différente de l'asymptote puisque cette ligne a précisément ces deux propriétés.

D É F I N I T I O N.

364. Supposant que la tangente PH (fig. 94.) rencontre l'axe CT en H , & que l'ordonnée PO au même axe menée par le point touchant P , est parallèle au second demi axe AT ; si par le point P , on élève une perpendiculaire PR , jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe prolongé autant qu'il est nécessaire, la partie OR de cet axe, comprise entre l'ordonnée PO , & la rencontre de la perpendiculaire HR à la tangente en P , est appelée *souperpendiculaire* ou *sounormale*.

PROPOSITION XXXVIII.

THÉOREME.

365. Supposant toutes choses comme dans la définition précédente, je dis que l'abscisse CO & la sounormale OR sont toujours dans un rapport constant; qui est celui de CT^2 à TA^2 . C'est-à-dire que l'on aura toujours cette proportion . . .
 $CO : OR :: CT^2 : TA^2$.

DÉMONSTRATION.

Le triangle rectangle RPH étant divisé en deux autres triangles rectangles ROP , POH , semblables entr'eux & au grand triangle; on a $OH : PO :: PO : OR$, donc $PO^2 = OH \times RO$, mais $PO^2 = CO^2 - CT^2 \times \frac{TA^2}{CT^2}$, & $OH = \frac{CO^2 - CT^2}{CO}$; donc on aura aulieu de l'équation précédente $(CO^2 - CT^2) \times \frac{TA^2}{CT^2} = (CO^2 - CT^2) \times \frac{OR}{CO}$, d'où l'on tire en divisant chaque membre par $CO^2 - CT^2$, $CO : OR :: CT^2 : TA^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

366. Si l'angle des asymptotes est aigu, on aura toujours $CT > TA$, donc aussi CO sera plus grand que OR : ce seroit le contraire si l'angle étoit obtus. Si l'on suppose l'abscisse OT infiniment petite, ou, ce qui revient au même, $CO = CT$; la sounormale OR devient égale à $\frac{TA^2}{CT}$, car de la proportion $CO : OR :: CT^2 : TA^2$, on tire $OR = \frac{TA^2 \times CO}{CT^2}$, donc lorsque $CO = CT$, $OR = \frac{TA^2}{CT}$. Mais il est évident, que cette expression n'est autre chose que le demi parametre de l'axe double de CT ; donc toutes les

perpendiculaires à la courbure de l'hyperbole ; seront comprises sur l'axe , depuis le point K que l'on suppose éloigné du sommet T de la courbe , de la grandeur du demi parametre , jusqu'à l'infini ; enforte qu'aucune perpendiculaire aux différentes parties de cette courbe , ne pourra tomber entre les points T & K , c'est ce que nous avons déjà reconnu en partie (num. 279).

COROLLAIRE II.

367. de tous les cercles que l'on peut inscrire à l'hyperbole qui touchent cette courbe à son sommet T , le plus grand possible est celui qui a pour rayon la ligne TK moitié du parametre. On démontreroit cette proposition à-peu-près comme nous avons démontré l'article (176) de l'ellipse. D'où il suit que plus l'angle des asymptotes sera grand , plus aussi les cercles inscriptibles aux hyperboles comprises dans ces angles , & tangents aux sommets des mêmes courbes seront grands ; de manière cependant que le rayon de ce cercle n'excédera jamais le demi parametre de l'axe principal. On peut encore reconnoître cette vérité , si l'on fait attention que la courbure d'une hyperbole dépendant de l'angle des asymptotes , plus cet angle sera obtus , moins elle sera grande ; & partant , plus le rayon du cercle inscriptible à la courbe sera grand , puisque les courbures des cercles sont en raison inverse des rayons. On voit par ce corollaire qu'en

général dans toutes les sections coniques le plus grand cercle inscriptible à chacune de ces courbes & tangent à l'origine de son axe, est celui qui a pour rayon la moitié du paramètre.

COROLLAIRE. III.

368. Si l'angle des asymptotes est droit, ou, ce qui revient au même, si l'hyperbole est équilatère; on aura toujours $CO=OR$, puisque dans ce cas $CT=TA$. D'où il suit que la distance du point O au point R , est égale à la distance du même point O au centre C de l'hyperbole.

SCHOLIE.

369. On a dû remarquer par tout ce que nous avons vû, que l'hyperbole équilatère a toutes les propriétés du cercle, mais dans un sens contraire; de même que les autres hyperboles ont les propriétés inverses des ellipses en général: ce rapport de l'hyperbole équilatère au cercle est frappant dans le dernier corollaire. Tout le monde sçait que les perpendiculaires aux tangentes d'un cercle passent toutes par le centre, ainsi la sousperpendiculaire est toujours égale à l'abscisse dans le cercle; & aussi éloignée de l'extrémité inférieure de l'ordonnée que le centre C , du même côté: dans l'hyperbole équilatère, toutes les sousperpendiculaires sont égales aux abscisses, & le point R est aussi éloigné du point O que le centre C l'est du même point, mais de l'autre côté.

PROPOSITION XXXIX.

THÉORÈME.

370. Si des extrémités P , Q de deux diamètres conjugués CP , CQ , (fig. 95.) on mène à un diamètre quelconque CT , des ordonnées PO , QR ; je dis que la différence des quarrés des abscisses, correspondantes à ces ordonnées, est égale au quarré du diamètre auquel on a mené ces ordonnées; c'est à-dire, que l'on aura $CO^2 - CR^2 = CT^2$.

DÉMONSTRATION.

Par le point P extrémité du diamètre CP , soit menée la tangente PH parallèle à son conjugué CQ , jusqu'à ce qu'elle rencontre en H le diamètre CT auquel on a mené les ordonnées PO , QR . La droite PO étant une ordonnée au diamètre CT , on aura $PO^2 : CO^2 - CT^2 :: CB^2 : CT^2$, (on suppose que CB est conjugué à CT) donc $PO^2 = \frac{CO^2 - CT^2 \times CB^2}{CT^2}$; QR étant une ordonnée extérieure à l'hyperbole BQ , on aura (art. 326) $QR^2 : CT^2 + CR^2 :: CB^2 : CT^2$, donc $QR^2 = \frac{(CT^2 + CR^2) \times CB^2}{CT^2}$, donc $PO^2 : QR^2 :: (CO^2 - CT^2) \times \frac{CB^2}{CT^2} : (CT^2 + CR^2) \times \frac{CB^2}{CT^2} :: CO^2 - CT^2 : CT^2 + CR^2$. Et à cause des triangles semblables HPO , CQR , on a $QR^2 : PO^2 :: CR^2 : OH^2$, donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $PO^2 \times QR^2 : QR^2 \times PO^2 :: CR^2 \times CO^2 - CR^2 \times CT^2 : OH^2 \times CT^2 + OH^2 \times CR^2$. Et comme les deux premiers termes sont

égaux, les deux derniers le seront aussi, & donneront $CR^2 \times CO^2 - CR^2 \times CT^2 = OH^2 \times CT^2 + OH^2 \times CR^2$, donc en transposant le terme $OH^2 \times CR^2$, & réduisant le premier membre, on aura $(CO^2 - CT^2 - OH^2) \times CR^2 = OH^2 \times CT^2$, d'où l'on déduit $CR^2 = \frac{OH^2 \times CT^2}{CO^2 - CT^2 - OH^2}$. Présentement si à la place de OH^2 on met sa valeur $\frac{(CO^2 - CT^2)^2}{CO^2}$ (num. 352.), on aura en réduisant $CO^2 - CT^2$ à la même dénomination $CR^2 = \frac{(CO^2 - CT^2)^2 \times CT^2}{(CO^2 - CT^2) \times CO^2 - (CO^2 - CT^2)^2}$, & divisant le numérateur &

le dénominateur de cette fraction par la fraction commune $\frac{CO^2 - CT^2}{CO^2}$ on aura pour la valeur de CR^2 ; $CR^2 = \frac{(CO^2 - CT^2) \times CT^2}{CO^2 - CO^2 + CT^2} = CO^2 - CT^2$, en effaçant ce qui se détruit. Donc $CO^2 - CR^2 = CT^2$; en faisant passer $-CT$ du second membre dans le premier, & CR^2 du premier dans le second. C. Q. F. D.

On démontreroit de la même manière que si des extrémités P, Q des mêmes diamètres, on mène les ordonnées Po, Qr au diamètre CB , conjugué à CT , on auroit $Cr^2 - Co^2 = CB^2$.

COROLLAIRE

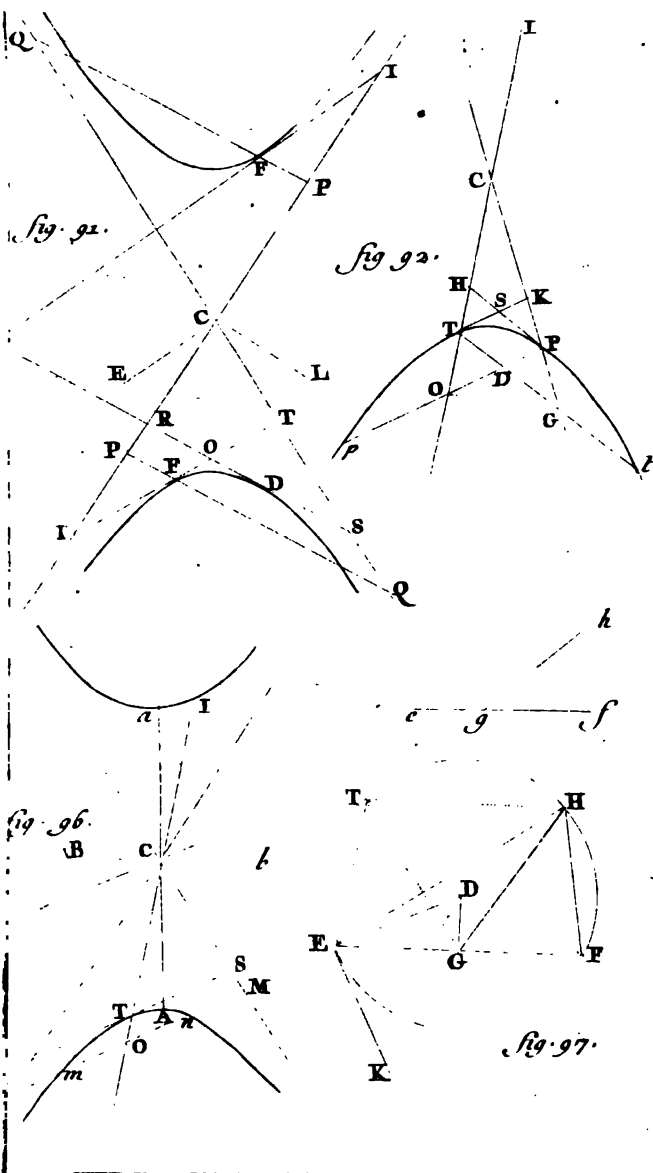
371. Si le diamètre CT est le grand axe de l'hyperbole, le diamètre CB conjugué à CT , sera le second axe, les triangles COP, CQR seront rectangles, puisque les axes font toujours angle droit l'un avec l'autre, & l'on aura toujours $CO^2 - CR^2 = CT^2$ & $Cr^2 - Co^2 = CB^2$; donc en retranchant la seconde égalité de la

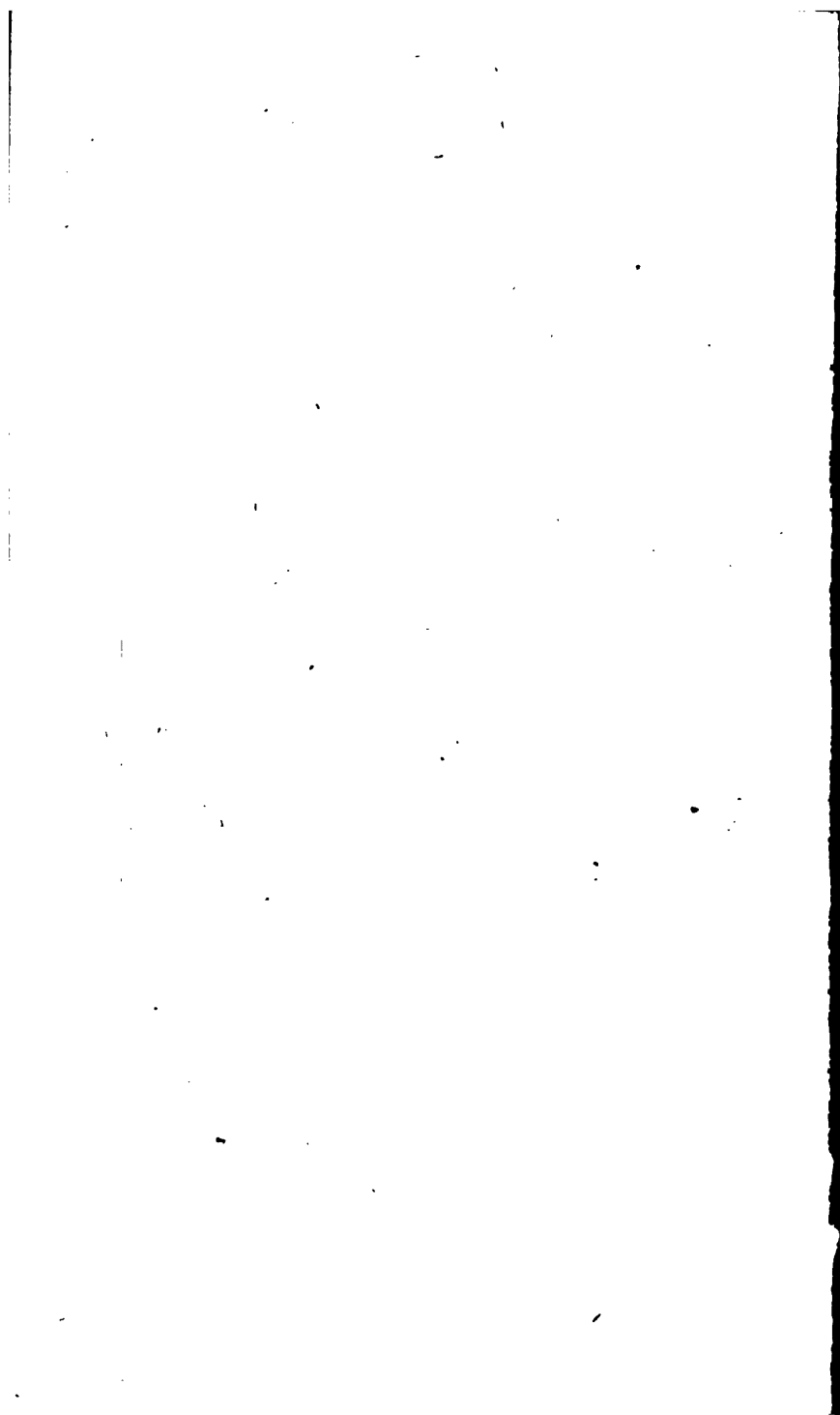
l'hyperbole donnée, dont les lignes EH, FH représentent les asymptotes; & partant les triangles LCM, EHF sont égaux, puisqu'ils ont un angle égal, compris entre côtés égaux; donc la ligne CTO , qui divise la droite LM en deux parties égales, est un diamètre de l'hyperbole & fait avec sa double ordonnée mn , l'angle demandé, ainsi ayant mené par le point T où le diamètre CT rencontre l'hyperbole, la tangente TS , cette ligne sera le second demidiambre demandé. C. Q. F. D.

R E M A R Q U E.

Comme l'hyperbole est une courbe symétrique en supposant que les diamètres donnés Aa, Bb soient les deux axes, on pourroit trouver de l'autre côté Aa , un autre diamètre qui fût aussi avec ses ordonnées ou son conjugué un angle égal à l'angle proposé: c'est ce qu'on peut reconnoître par la fig. 97; car si l'on mène par le point H la parallèle IH à la corde EF , & que par le point I on mène les droites IE, IG, IF , on aura un nouveau triangle IEF , égal au triangle HEF , par le moyen duquel on pourra déterminer deux nouveaux diamètres conjugués qui aient les mêmes propriétés que les deux premiers CT, CS .

Les propositions que nous venons de voir sont précisément les mêmes que celles que nous avons démontré dans l'ellipse, ou leurs inverses: dans le reste de ce livre, nous allons examiner les propriétés que l'on peut regarder comme particulières à l'hyper-





bole considérée par rapport à ses asymptotes; nous déterminerons les rapports des portions d'une même hyperbole, & ceux des différentes hyperboles. On n'a point trouvé jusqu'ici de méthode pour toiser la surface absolue de l'hyperbole, & selon toutes les apparences la quadrature exacte de cette courbe n'est pas plus aisée que celle de l'ellipse; & de même que la quadrature de toutes les ellipses imaginables dépend de celle du cercle que l'on peut regarder comme la plus simple dans le genre elliptique; nous ferons voir aussi que la quadrature de toutes les hyperboles possibles, se réduit à celle de l'hyperbole équilatère qui est aussi la plus simple de toutes dans le genre hyperbolique.

DÉFINITIONS.

373. Une surface comprise entre une corde AE , & une partie de la courbe ABE , est appelée *segment hyperbolique*, (fig. 98.)

374. Une surface $ACEBA$ comprise entre la même courbe, & deux diamètres CA , CE terminés aux extrémités de l'arc ABE , est appelé, *secteur hyperbolique*.

PROPOSITION XLI.

THÉOREME.

375. Deux segments hyperboliques ABE , BAD (fig. 98.) sont égaux lorsqu'ils sont compris entre des parallèles DE , TS .

DÉMONSTRATION.

Nous supposerons d'abord que les cordes AE , BD qui soutiennent les segments ABE ,

courbe, par lequel & par le point *A* menant une soutendante, le segment compris entre cette corde & son arc seroit encore égal au segment proposé. Enfin, le problème peut toujours avoir deux solutions tant que le point *A* sera différent des points *B*, *D*, & qu'il sera compris dans l'arc *AD*: partout ailleurs il ne peut en avoir qu'une.

COROLLAIRE. II.

380. Il suit encore de là que pour partager un segment ou un secteur hyperbolique en deux parties égales, il n'y a qu'à mener par le centre *C* & le point *D* milieu de la soutendante *AB* (fig. 100) le diamètre *CTD*; car on peut concevoir le segment *ATB* comme composé d'une infinité de lignes droites *GH* parallèles à *AB*; donc puisque le diamètre divise toutes ces parallèles en deux également, il divisera aussi le segment en deux parties égales; c'est par la même raison qu'il divise le secteur en deux également; car il est évident que les éléments *FG*, *HE* de la partie concave *CATSB* sont égaux l'un à l'autre puisque *EI=FI* & que *GI=IH*.

PROPOSITION XLIII.

THÉORÈME.

381. Deux segments hyperboliques sont égaux lorsqu'ils ont même base *FG* (fig. 101) & qu'ils sont compris entre parallèles *FG*, *TB*; soit qu'ils soient

*Soient tous les deux inclinés, ou que l'un soit droit
& l'autre oblique.*

DÉMONSTRATION.

Par le point *M* milieu de la droite *FG*, qui est la base commune aux deux segments, & les points *T, L* où les courbes touchent la parallèle *TB* à la base *FG*, soient menées les lignes *MTC*, *MLD* qui seront des diamètres, puisqu'elles divisent la base de chaque segment en deux parties égales, & quelles passent par les sommets *T, L* des mêmes segments. Si le point *C* est le centre de l'hyperbole droite *FTG*; le point *D* où la ligne *CD* parallèle à *FG* coupe le diamètre *ML*, sera aussi le centre de l'hyperbole oblique *FLG*: car si l'on imagine des hyperboles opposées aux deux premières, chacune sera semblable à son opposée, & les sommets *t, l* de ces courbes seront dans une même ligne *tl*, parallèle à *TL*; d'où il suit évidemment que le point *D* sera le centre de l'hyperbole *FLG*. Cela posé; nous imaginerons que la surface de chaque segment est composée d'une infinité d'ordonnées placées les unes auprès des autres comme *PO, po*; & nous ferons voir que chaque ordonnée *PO*, est égale à sa correspondante *po*; car c'est à quoi se réduit toute la démonstration, puisque le nombre des éléments est le même de part & d'autre, étant mesuré par la perpendiculaire *TM*.

Les droites *GM, PO* étant ordonnées au même axe *CM* de l'hyperbole *FTG*, leurs

quarrés sont comme les produits des abscisses correspondantes, ce qui donne $PO^2 : MG^2 :: CO^2 - CT^2 : CM^2 - CT^2$; par la même raison, MG & po étant ordonnées au diamètre DM , on aura $po^2 : MG^2 :: Do^2 - DL^2 : DM^2 - DL^2$. Mais à cause des triangles semblables MCD , MTL , MOo ; les parties CM , CO , CT sont proportionnelles aux parties DM , Do , DL ; ce qui donne $CO^2 : CT^2 :: Do^2 : DL^2$ & $CM^2 : CT^2 :: DM^2 : DL^2$, donc *dividendo* $CO^2 - CT^2 : CT^2 :: Do^2 - DL^2 : DL^2$ & de même $CM^2 - CT^2 : CT^2 :: DM^2 - DL^2 : DL^2$, d'où l'on tire, $CO^2 - CT^2 : CM^2 - CT^2 :: Do^2 - DL^2 : DM^2 - DL^2$. Donc $PO^2 : MG^2 :: po^2 : MG^2$; donc $PO^2 = po^2$; donc $PO = po$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

382. Il suit de cette proposition, que le diamètre LB conjugué au diamètre DL est égal au second axe AT de l'hyperbole FTG . Car puisque MG est ordonnée à l'axe CM , on aura $MG^2 : CM^2 - CT^2 :: TA^2 : CT^2$; donc $MG^2 = \frac{CM^2 - CT^2}{CT^2} \times TA^2$; de même MG étant une ordonnée au diamètre DM , on aura $MG^2 : DM^2 - DL^2 :: LB^2 : DL^2$, donc $MG^2 = \frac{DM^2 - DL^2}{DL^2} \times LB^2$; donc $\frac{CM^2 - CT^2}{CT^2} \times TA^2 = \frac{DM^2 - DL^2}{DL^2} \times LB^2$ & divisant chaque membre par les rapports égaux $\frac{CM^2 - CT^2}{CT^2}$ & $\frac{DM^2 - DL^2}{DL^2}$, on aura $TA^2 = LB^2$, donc $TA = BL$.

COROLLAIRE II.

383. Puisque $OP = op$, en ôtant de ces lignes égales la partie commune oP , on

aura $Oo=Pp$: d'où il suit que si par le point R où le diamètre DL rencontre l'hyperbole TG , on mène une droite QRS parallèle à MG ; le triangle MRS sera égal à l'espace curviligne GQR terminé par deux portions d'hyperboles différentes, & par la ligne droite QR .

COROLLAIRE. III.

384. Il suit encore de cette proposition, que deux secteurs hyperboliques de deux hyperboles différentes sont égaux, lorsqu'ils ont même base & qu'ils sont compris entre parallèles. Car les triangles CFG , DFG sont égaux puisqu'ils ont même base & même hauteur; & si de ces triangles on ôte les hyperboles égales, les restes ou les secteurs hyperboliques $CF TG$, $DF LG$ seront égaux. Cette proposition est vraie pour toutes les sections coniques & la démonstration seroit la même pour chacune de ces courbes.

PROPOSITION XLIV.

THEOREME.

385. soient deux hyperboles TM, TN (fig. 102) ou AM, BN (fig. 103) dont CT est un diamètre commun, CB, CA les diamètres Conjugués au diamètre commun CT ; si par un point P pris sur le même diamètre on tire une droite PMN terminée aux deux hyperboles, & parallèle au diamètre CA , je dis que l'on aura toujours $PM : PN :: CA : CB$, c'est-à-dire que les ordonnées à ces différentes courbes

sont entr'elles comme les diametres inégaux conjugués au diametre commun.

DÉMONSTRATION.

Comme PM est une ordonnée à l'hyperbole CTM , on aura $PM^2 : CP^2 - CT^2 :: CA^2 : CT^2$; & de même, parceque PN est ordonnée à l'hyperbole TN , on aura par la même raison $PN^2 : CP^2 - CT^2 :: CB^2 : CT^2$, donc puisque les conséquents de ces proportions sont en proportion, les antécédents y sont aussi; & donneront $PM^2 : PN^2 :: CA^2 : CB^2$, donc tirant les racines; $PM : PN :: CA : CB$. C. Q. F. D.

Si le diametre commun n'est pas un premier diametre, les ordonnées PM, PN seront extérieures aux hyperboles BN, BM ; & la proportion sera toujours la même. Car puisque les diametres CA, CB sont conjugués au diametre commun CT , on aura pour l'hyperbole $AM, PM^2 : CT^2 + CP^2 :: TA^2 : CT^2$, & pour l'hyper. $AN, PN^2 : CT^2 + CP^2 :: CB^2 : CT^2$; donc on aura encore de même que dans la figure 102. . $PM : PN :: CA : CB$. C. Q. F. 2^o D.

COROLLAIRE I

386. On peut concevoir les demi-segments hyperboliques TPM, TPN , comme étant composés d'une infinité d'ordonnées telles que PM, PN , infiniment proche les unes des autres; & comme l'on aura toujours $PM : PN :: CA : CB$, il s'en suit que les demi segments TPM, TPN

seront entr'eux comme les diametres inégaux conjugués au diametre commun. Car dans une suite infinie de rapports égaux, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un seul antécédent est à son conséquent. On démontreroit de même (*fig. 103.*) que les trapèzes hyperboliques $CPNB$, $CPMA$ sont entr'eux comme CB est à CA .

COROLLAIRE II.

387. Les triangles CPM , CPN (*fig. 102.*) ayant même hauteur sont entr'eux comme leurs bases PM , PN , ou comme CA est à CB ; donc si l'on ôte de ces triangles les demi-segments TPM , TPN , qui sont dans la même raison, on aura $CPM - TPM : CPN - TPN :: CA : CB$; d'où il suit que les secteurs hyperboliques CTM , CTN sont aussi entr'eux comme les diametres inégaux conjugués au diametre commun.

De même, (*fig. 103.*) puisque les trapèzes hyperboliques $CPNB$, $CPMA$ sont entr'eux comme CB à CA , ainsi que les triangles CPN , CPM , puisqu'ils ont même hauteur CP , & que leurs bases PN , PM , sont entr'elles comme CB à CA , on aura la proportion suivante $CPNB - CPN : CPMA - CPM :: CB : CA$, d'où il suit que les secteurs hyperboliques CMA , CNB sont entr'eux comme les diametres inégaux conjugués au diametre commun.

COROLLAIRE III.

388. Si les diametres conjugués CB , CT de

l'hyperbole TN sont égaux; (*fig. 102.*) ou; ce qui revient au même, si l'hyperbole TN est équilatère, on aura $PN^2 = CP^2 - CT^2$; mais l'hyperbole TM donne $PM^2 : CP^2 - CT^2 :: CA^2 : CT^2$, donc en mettant à la place de $CP^2 - CT^2$, PN^2 qui lui est égal, par la nature de l'hyperbole, équilatère, on aura $PM^2 : PN^2 :: CA^2 : CT^2$, ou $PM : PN :: CA : CT$; d'où il suit que l'on peut regarder une hyperbole quelconque, comme provenant d'une l'hyperbole équilatère dont on auroit allongé ou accourci toutes les ordonnées proportionnellement, dans le rapport du diamètre de l'hyperbole équilatère au second diamètre de l'hyperbole ainsi décrite. Il suit encore de-là que si l'on pouvoit quarrer un segment ou un secteur d'une hyperbole équilatère on pourroit aussi par une simple proportion, quarrer tous les segments correspondants des autres hyperboles décrites sur le même diamètre, de même que nous avons enseigné à quarrer les segments & secteurs elliptiques, par le moyen des segments circulaires correspondants d'un cercle décrit sur un des diamètres de l'ellipse proposée.

PROPOSITION XLV.

THÉORÈME.

389. Si on prend sur une asymptote CM deux parties CD , CF , & sur l'autre asymptote CN deux autres parties CL , CK (*fig. 104*) proportionnelles entr'elles, & qu'ayant mené par les extrémités de ces lignes, les parallèles aux mêmes asymptotes DE , FG , IL , KH ; jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'hy-

perbole aux points E, G, I, H ; on mene les diametres CE, CG, CI, CH ; je dis que les secteurs CGE, CIH , sont égaux.

DÉMONSTRATION.

Par les points E, I, G, H soient menées les droites EI, GH prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent les asymptotes aux points P, Q, M, N ; & soient encore menées par les points I, H les parallèles HB, IA à l'asymptote CN ; on aura à cause des triangles semblables $DPE, LIQ; FMG, KHN$ formés par les portions des asymptotes & les parallèles aux mêmes asymptotes; $PD:PE::LI:IQ$, & $MF:MG::HK:NH$; donc puisque (num. 292.) $PE=IQ$ & que $MG=NH$, on aura aussi $PD=IL$ ou CA , & $MF=HK$ ou CB . Mais puisque les parallélogrammes CH, CI sont égaux (num. 299) & qu'ils ont un angle égal, les côtés sont réciproques, & donnent CB ou $MF:CA$ ou $PD::CL:CK$, & hyp. $CL:CK::CD:CF$

& (num. 299) $CD:CF::FG:DE$

donc $MF:PD::FG:DE$; d'où il suit que les triangles MFG & PDE sont semblables, & que les droites PE, MG ou les totales PQ, MN sont parallèles, puisque les droites DE, FG le sont par construction; donc les secteurs hyperboliques CIH, CEG compris entre les parallèles sont égaux (art. 378). C. Q. F. D.

COROLLAIRE. I.

390. Ayant mené par un point I de l'hyperbole des droites IA, IL parallèles aux

asymptotes, si l'on prend sur chaque asymptote des parties CK , CD telles que l'on ait $CL:CK::CA:CD$, il suit de-là proposition précédente que les secteurs CIH , CIE seront égaux; car on démontreroit de la même manière que dans le théorème que la corde EH seroit parallèle à la tangente au point I .

COROLLAIRE II.

391. Supposant toujours que l'on ait $CL:CK::CA:CD$, si l'on fait $CA:CD::CD:CF$, il suit de la proposition précédente que les trois secteurs hyperboliques CHI , CIE , CEG seront égaux; car puisque $CL:CK::CA:CD$ les secteurs CHI , CIE sont égaux par le corollaire précédent, & puisque l'on a, par construction $CL:CK::CA:CD$

& encore $CA:CD::CD:CF$, donc $CL:CK::CD:CF$; d'où il suit que les secteurs CIH , CEG sont égaux entr'eux; & partant les trois secteurs CIH , CIE , CEG le sont aussi.

COROLLAIRE III.

392. Si l'on regarde le secteur CIH comme l'unité; le secteur $CHIE$ sera 2; le secteur $CHIEG$ sera 3; d'où il suit que les secteurs croissent en progression arithmétique; d'ailleurs nous avons supposé que les abscisses CA , CD , CF sont en proportion continue géométrique, puisque l'on a $CA:CD::CD:CF$:

Donc les secteurs hyperboliques *CHI*, *CHIE*, *CHIEG* peuvent être regardés comme les logarithmes des lignes *CA*, *CD*, *CF*. (on a vû dans l'arithmétique que les logarithmes, sont des nombres en progression arithmétique, correspondants à des nombres en progression géométrique, par exemple dans la progression décuple $\div 1 : 10 : 100 : 1000$, &c. Les nombres 0, 1, 2, 3, &c. sont les logarithmes des nombres 1, 10, 100, 1000, &c.)

COROLLAIRE. IV.

393. Il suit encore de-là que l'on peut calculer les logarithmes par les aires hyperboliques, & réciproquement les surfaces des secteurs hyperboliques par les logarithmes. Car si je connois l'abscisse *CF*, avec la surface du secteur *CHIG* qui est le logarithme de cette abscisse, & qu'on me demande la surface du secteur *CHE*, dont l'abscisse est *CD*; je n'aurai qu'à chercher le logarithme de *CD*, & ce logarithme sera la surface du secteur *CHIE*.

On est redevable de cette admirable propriété au P. GRÉGOIRE DE S. VINCENT Jésuite. Ce grand géometre la trouva lorsqu'il s'appliquoit à la quadrature du cercle; & l'on doit lui avoir une grande obligation de ses recherches, quand elles n'auroient eu d'autre fruit que la seule propriété que nous venons de voir: elle a été démontrée depuis qu'on l'a connue de plusieurs manières; celle que je viens de donner est de M. Le Marquis de l'Hopital; elle

m'a paru la plus simple de toutes. On en peut voir encore d'autres démonstrations dans le traité des sections coniques du P. DESCHATELLES. Ce dernier a grand soin de rendre justice à l'auteur de la découverte, & se plaint en même temps d'une manière assez adroite de ceux qui ne l'avoient pas imité; mais il ne faut point être surpris que cette vérité n'ait pas été connue par les anciens: comme ils ne connoissoient point les logarithmes, quand même ils auroient trouvé cette propriété, il n'y a gueres d'apparence qu'ils en eussent vu l'utilité; & au contraire il est probable que depuis la connoissance des logarithmes, une si belle proposition ne pouvoit demeurer longtemps dans l'obscurité.

PROPOSITION XLVI.

THÉORÈME.

394. si par les extrémités I , E d'un secteur hyperbolique CIE (fig. 105.), on mene parallèlement à l'asymptote CL , les droites IA , ED , terminées à l'autre asymptote CD ; je dis que le secteur hyperbolique CIE , sera égal au quadrilatère $ADEI$.

DÉMONSTRATION.

Soit encore menée par le point I la droite IL parallèle à l'asymptote CM ; le triangle CLI sera égal au triangle CDE , puisqu'ils sont chacun moitiés de parallélogrammes égaux $CDEF$, $CAIL$. Donc, en ajoutant ces triangles au secteur CIE , on aura le quadrilatère $CLIE$ égal au quadrilatère $CDEI$; & ôtant ensuite

du premier *CLIE* le triangle *CLI*, & du second *CDEI*, le triangle *CAI* égal au triangle *CLI*, les restes seront égaux : il restera d'une part le secteur *CEI*, & de l'autre le quadrilatère *ADEI*, qui seront évidemment égaux. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

395. Donc si l'on a plusieurs secteurs hyperboliques égaux *CIH*, *CIE*, *CEG* (*fig. 104*) & que des extrémités de ces secteurs, on mène parallèlement à l'une des asymptotes *CN*, les droites *HB, IA, ED, GF* terminés à l'autre asymptote *CM*, les trapèzes hyperboliques *ABHI*, *EDAI*, *GFDE* correspondants aux secteurs hyperboliques, seront aussi égaux entr'eux. Dailleurs les bases *AB*, *AD*, *DF* de ces trapèzes sont les différences des abscisses *CB*, *CA*, *CD*, *CF*, qui sont en progression géométrique, comme on l'a démontré dans la proposition précédente, & dans ses corollaires; on peut donc établir en général, que les trapèzes hyperboliques sont égaux lorsqu'ils ont pour base, les différences des abscisses en progression géométrique. On peut aussi conclure que deux trapèzes hyperboliques quelconques correspondants à deux secteurs hyperboliques, seront entr'eux comme les secteurs hyperboliques correspondants; ce qui est bien évident, puisqu'ils sont chacun égaux aux mêmes secteurs hyperboliques.

COROLLAIRE II.

396. Supposant toujours les secteurs hyperboliques *CIH*, *CIE*, *CEG* égaux entr'eux,

il suit de cette proposition que les trapèzes hyperboliques $BAIH$, $BDEIH$, $BFG EIH$, sont en progression arithmétique ; donc ils peuvent représenter les logarithmes des abscisses correspondantes qui sont en progression géométrique.

PROPOSITION XLVII.

THÉORÈME.

397. Si par les extrémités A, D, F, H (fig. 106) des abscisses CA, CD, CF, CH prises sur une asymptote CH , & supposées en proportion continue, on mène parallèlement à l'autre asymptote CR les ordonnées AB, DO, FP, HK ; je dis que ces ordonnées seront ainsi que leurs abscisses, dans une progression géométrique ; avec cette différence que la progression des ordonnées est décroissante & que celle des abscisses est croissante.

DÉMONSTRATION.

Par la nature de l'hyperbole considérée entre ses asymptotes, on a les équations suivantes, $CD \times DQ = CA \times AB$, $CA \times AB = CF \times FP$, $CF \times FP = CH \times HK$; d'où l'on tire $HK:FP::CF:CH$,

par hypot. $CF:CH::CD:CF$; à cause de l'équation $CD \times DQ = CF \times FP$, on aura $CD:CF::FP:DO$

donc $HK:FP::FP:DO$, c'est-à-dire que les ordonnées HK, FP, DO sont en proportion continue ; car on démontreroit de la même manière que $FP:DO::DO:AB$. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

398. On auroit pu déduire cette proposition

des deux précédentes : car puisque les abscisses CB, CA, CD, CF sont en progression géométrique (*fig. 104*) les secteurs hyperboliques correspondants aux différences de ces abscisses comme CIH, CIE, CEG sont égaux entr'eux : donc les parties CK, CL, CO de l'asymptote CN , sont en même raison que les parties CF, CD, CA de l'asymptote CF (*art. 389*) : donc elles forment, ainsi que les premières, une progression géométrique. Il est de plus évident que ces mêmes parties CK, CL, CO sont égales aux ordonnées BH, AI, DE ; à cause des parallèles entre lesquelles elles sont comprises : donc elles sont en progression géométrique.

COROLLAIRE I.

339. Puisque (*fig. 106*) les abscisses CA, CD, CF, CH sont en progression géométrique, les trapèzes hyperboliques correspondants aux différences de chacune de ces abscisses à la première CA , tels que les trapèzes $ABOD, ABPF, ABKH$ qui croissent en progression arithmétique, (*art. 396*) sont les logarithmes de ces abscisses : mais, par la proposition précédente, les ordonnées correspondantes HK, FP, DO, AB sont aussi en progression géométrique ; donc le trapèze $FPHK$ pourra être regardé comme le logarithme de l'ordonnée KH ; le trapèze $DOKH$, comme le logarithme de l'ordonnée FP , & enfin le trapèze $ABKH$, comme celui de l'ordonnée DO .

COROLLAIRE II.

400. Il suit encore des propositions précédentes, que si l'on mène par l'extrémité K de la dernière ordonnées HK , & par le centre C , la droite CK ; cette droite coupera les autres ordonnées aux points L, M, N de manière que les parties FL, DM, AN de ces ordonnées seront de nouveaux termes de la progression géométrique de ces mêmes ordonnées; en sorte que l'on aura la progression suivante $\therefore AB : DO : FP : HK : FL : DM : AN$; car, par la propriété de l'hyperbole, (art. 299) $FP : HK :: CH : CF$, & à cause des triangles CHK, CFL ; $CH : CF :: HK : FL$, donc $FP : HK :: HK : FL$. On démontreroit de même que $HK : FL :: FL : DM$; donc les ordonnées AB, DO, FP, HK , & les droites FL, DM, AN forment une progression géométrique.

COROLLAIRE III.

401. De même si par l'extrémité B de la première ordonnée AB , & par le centre C on mène une droite indéfinie CBI , qui rencontre les autres ordonnées prolongées aux points E, G, I ; on aura encore une suite de proportionnelles AB, DE, FG, HI qui seront toujours en progression géométrique avec les ordonnées HK, FP, DO, AB ; c'est-à-dire, que l'on aura cette progression $\therefore DO : AB : DE : FG : HI$. Car par la nature de

l'hyperbole nous avons ces proportions ...
 $DO : AB :: CA : CD$; à cause des triang. CAB ,
 CDE ; on aura $CA : CD :: AB : DE$;
donc $DO : AB :: AB : DE$. D'ailleurs les abscisses
 CA , CD , CF , étant, *par hypotese*, en pro-
gression géométrique; leurs proportionnelles AB ,
 DE , FG y seront aussi; donc on aura la suite
de proportionnelles $\therefore DO : AB : DE : FG : HI$.

C O R O L L A I R E IV.

402. Si l'on réunit ce que l'on vient de dé-
montrer dans des deux corollaires précédents,
on verra que des parties des ordonnées coupées
par le diametre CK , de ces ordonnées & de
leurs prolongements terminés au diametre
 CB , il en résulte cette progression géomé-
trique croissante

$\therefore AN : DM : FL : HK : FP : DO : AB : DE : FG : HI$;

de laquelle on pourroit déduire un grand nom-
bre de propriétés fort curieuses, que je sup-
prime de peur d'entrer dans un trop grand
détail.

C O R O L L A I R E V.

403. Puisque les abscisses CA , CD , CF , CH
sont en progression géométrique, les quarrés
des mêmes lignes y seront aussi, & par consé-
quent les triangles semblables CAB , CDE ,
 CFG , CHI qui sont dans la raison des quarrés
de ces mêmes abscisses, formeront entr'eux
une progression géométrique. D'où il suit que
si l'on donne zero pour logarithme au triangle

CAB , le secteur ou trapèze hyperbolique $ABOD$ pourra être pris pour le logarithme du triangle CDE ; de même le trapèze hyperbolique $AFPOB$ fera le logarithme du triangle CFG , & ainsi des autres. D'où il suit que si l'on connoît le triangle CDE , & le logarithme de ce triangle, ou, ce qui est la même chose, le trapèze $ABOD$; on pourra connoître tous les autres trapèzes tels que $AFPOB$, $AHKB$; pourvû que l'on connoisse les triangles correspondants CFG , CHI dont ils sont les logarithmes. Ainsi les propriétés de ces triangles ferviroient de la même manière que les abscisses à calculer les aires hyperboliques, mais il vaut mieux se servir des abscisses, parceque des lignes sont plus simples que des triangles.

REMARQUE.

Tout ce que nous avons dit des trapèzes hyperboliques doit aussi s'entendre des secteurs correspondants qui leurs sont égaux comme on l'a démontré (art. 394).

PROPOSITION XLVIII.

THEOREME.

404. Soient deux hyperboles BLH , EGE (fig. 107) placées entre les mêmes asymptotes CM , CF ; & dont les puissances sont les quarrés AB^2 , DE^2 ; si par un point quelconque F de l'une des asymptotes, on mene parallèlement à l'autre asymptote CM ,

une

une droite FGH , qui rencontre chacune des hyperboles aux points H , G ; je dis que les ordonnées FH , FG ; sont entr'elles comme les quarrés AB^2 , DE^2 des puissances AB , DE .

DÉMONSTRATION.

Par la propriété de l'hyperbole BLH , on a cette équation $CF \times FH = AB^2$; & par la même propriété de l'autre hyperbole EGK , on a $CF \times FG = DE^2$; donc en faisant une proportion avec les deux membres de cette équation, on aura $CF \times FH : CF \times FG :: AB^2 : DE^2$; & divisant la première raison par CF , on aura $FH : FG :: AB^2 : DE^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

405. On peut concevoir les trapèzes hyperboliques $FDLH$, $FDEG$ comme remplis d'une infinité d'ordonnées parallèles à FG , qui composent leurs superficies; & comme toutes ces ordonnées sont entr'elles, chacune à sa correspondante, dans le rapport de AB^2 à DE^2 ; la somme de ces ordonnées, ou les surfaces de ces trapèzes seront aussi dans le même rapport. D'où il suit que si l'on a deux trapèzes hyperboliques $DLHF$, $DEGF$ terminés à deux hyperboles différentes comprises entre les mêmes asymptotes, & renfermés entre les mêmes parallèles DE , FG ; ces trapèzes seront entr'eux comme les quarrés des puissances des mêmes hyperboles.

COROLLAIRE II.

406. Il suit encore de ce que les hyperboles BLH , EGK ont les mêmes asymptotes, qu'elles ont aussi leur axe sur une même ligne droite: car le premier axe d'une hyperbole quelconque, divise l'angle des asymptotes en deux angles égaux; or il est visible qu'il n'y a qu'une seule ligne qui puisse diviser le même angle en deux également.

COROLLAIRE III.

407. Donc si le point B est le sommet de l'hyperbole BLH , en menant par ce point & le centre C la ligne CB ; le point E où cette ligne rencontre la seconde hyperbole EGK , sera aussi le sommet de la même hyperbole. D'où il suit évidemment que les lignes AB , ED , menées par les points B , E parallèlement à l'asymptote CM sont les puissances de ces hyperboles.

COROLLAIRE IV.

408. Puisque l'on a toujours $FG:FH::DE:AB$, & que d'ailleurs il est évident que DE est plus grand que AB ; on aura aussi toujours FG plus grande que FH : donc jamais le point G & le point H ne pourront se confondre en un seul & même point. D'où il suit que l'hyperbole BH est asymptote de l'hyperbole EG , c'est-à-dire que cette dernière s'approche continuellement de la première sans jamais pouvoir la toucher, si loin qu'on les prolonge l'une &

l'autre. On démontreroit la même chose de toute autre hyperbole comprise entre les mêmes asymptotes; donc toutes les courbes décrites dans le même angle sont asymptotes les unes par rapport aux autres.

COROLLAIRE V.

409. Il suit encore de-là que les aires hyperboliques indéfinies, compris entre chacune des hyperboles & les asymptotes communes, sont aussi entr'eux comme les quarrés des puissances AB , DE . Car on peut concevoir ces espaces hyperboliques comme remplis d'une infinité d'ordonnées parallèles à une des asymptotes; chacune étant à sa correspondante dans le rapport des quarrés des puissances, & le nombre de ces ordonnées étant le même de part & d'autre, puisque l'asymptote est la même de part & d'autre. On voit par-là, que quoique les espaces hyperboliques soient chacuns infinis ou plutôt indéfinies, il n'en est pas moins possible & facile de déterminer les rapports qu'ils ont entr'eux. Au reste faut-il regarder chacun de ces espaces comme infinis en eux mêmes, & ne doivent-ils pas être considérés comme des grandeurs finies & déterminées; quoique leurs expressions & leurs limites soient infinies? On est d'autant plus tenté de le croire qu'il y a des espaces finis & terminés, celui du cercle, par exemple, que l'on transforme en d'autres courbes asymptotiques dont la dernière ordonnée n'a d'autre terme que l'infini. Je sçai

que chacune de ces courbes ont des propriétés qui les différencient totalement les unes des autres & de celle que nous examinons ici ; mais au moins sera-t-il toujours certain que si l'on regarde les espaces compris entre l'hyperbole & les asymptotes comme infinis, ces sortes d'infinis ne sont que des infinis de rapport, & non pas cet infini, au-de-là duquel nous ne pouvons plus rien concevoir. On pourroit déduire encore de cette proposition & de ses corollaires, des démonstrations fort belles, de la divisibilité de la matiere à l'infini.

COROLLAIRE VI.

410. Si par les sommets *B, E* des hyperboles *BL, EG* on mene les tangentes *BT, ER* ; les triangles *ABT, DER* seront semblables, & donneront $AB^2 : DE^2 :: BT^2 : ER^2$; à cause des triangles *CBT, CER* on a $BT^2 : ER^2 :: CB^2 : CE^2$.

Donc les ordonnées *FG, FH* seront aussi entr'elles comme les quarrés des axes *CB, CE* ; ou de leurs conjugués *BT, ER* : puisque les quarrés de ces axes sont proportionels aux quarrés des lignes *AB, DE*.

PROPOSITION XLIX.

THÉOREME.

411. Supposant toutes choses comme dans la proposition précédente ; si par les points *G, H* (fig. 108) où une droite *FG* parallèle à l'asymptote *CM*, rencontre les hyperboles *EG, BH* ; on mene deux droites quelconques *LGM, IHK* parallèles entr'elles ; je dis que les rectangles $IH \times HK, LG \times GM$, sont

entr'eux comme les quarrés des axes CB , CE des mêmes hyperboles; c'est-à-dire que l'on aura cette proportion $IH \times HK : LG \times GM :: CB^2 : CE^2$.

DÉMONSTRATION.

A cause des parallèles FG , CM les droites HK , GM aussi parallèles entr'elles (hyp.) seront égales, donc on aura la proportion $IH \times HK : LG \times GM :: IH : LG$; & à cause des trian. semblables FIH , FLG , $IH : LG :: FH : FG$, & (art. 410.) $FH : FG :: CB^2 : CE^2$ donc $IH \times HK : LG \times GM :: CB^2 : CE^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

412. Par le centre C & le point O milieu de la droite LM , soit tiré le diamètre $CRTO$ qui coupe les hyperboles aux points R , T ; & par ces points soient menées les droites RS , TV parallèles à la droite ML , & tangentes aux mêmes points. On aura par les propriétés des hyperboles (art. 290). $IH \times HK = RS^2$, & $LG \times GM = TV^2$ donc $IH \times HK : LG \times GM :: RS^2 : TV^2$; & à cause des trian. semb. CRS , CTV , $RS^2 : TV^2 :: CR^2 : CT^2$.

Donc $IH \times HK : LG \times GM :: CR^2 : CT^2$.

Donc aussi $CR^2 : CT^2 :: CB^2 : CE^2$;

puisque, par la prop. précéd. les quarrés des axes sont proportionels aux mêmes rectangles $IH \times HK$, $LG \times GM$; & si l'on divise par les lignes égales HK , GM ; on aura $IH : LG :: CR^2 : CT^2$, ou, :: $CB^2 : CE^2$.

T II.

COROLLAIRE. II.

413. Il suit de cette proposition & de son corollaire que tous les diametres communs aux hyperboles décrites dans les mêmes asymptotes, sont proportionels entr'eux & aux axes des mêmes hyperboles. On doit entendre la même chose des diametres conjugués à ces diametres communs, ou des tangentes menées par les extrémités des ces diametres; c'est-à-dire, que de même que $CB:CE::CR:CT$, on aura aussi en supposant les tangentes $PB, DE; RS, TV$ menées par les extrémités des axes & des diametres, $BP:ED::RS:TV$. Cela suit évidemment des proportions démontrées ci-devant.

SCHOLIE.

414. On déduit de cette proposition & de ses corollaires une démonstration toute nouvelle des propriétés des sécantes intérieures & extérieures de l'hyperbole. Cette démonstration est d'autant plus belle qu'elle peut s'appliquer à chacune des sections coniques en particulier, pourvûque l'on détermine dans l'ellipse & dans la parabole, les lignes qui tiennent lieu d'asymptote dans chacune de ces courbes; ce que je ne crois pas que l'on ait examiné jusqu'ici. comme la démonstration que nous avons donné de ces propriétés (art. 338) est un peu compliquée & que je ne crois pas qu'on en puisse donner de plus simple que celle que l'on tire

du dernier corollaire , nous allons nous en servir , pour démontrer un des cas principaux de cette proposition. Nous laisserons aux commençants le plaisir de trouver d'eux-mêmes l'application de la démonstration suivante à la parabole & à l'ellipse.

PROPOSITION L.

THÉORÈME.

415. Soient deux droites GF , MN (fig. 109) qui se coupent dans un point O , audehors de l'hyperbole BRP ; lesquelles sont divisées en deux également aux points I , K par les diamètres CI , CK ; je dis que les rectangles $MO \times ON$, $GO \times OF$ sont entr'eux comme les carrés des tangentes RS , BL parallèles aux droites MN , GF menées par les extrémités des diamètres qui divisent ces lignes en deux également ; 2^o que les produits $PO \times OT$, $QO \times OX$ formés sur les parties des mêmes lignes terminées à l'hyperbole , sont entr'eux comme les carrés des mêmes tangentes RS , BL .

DÉMONSTRATION.

1^o Imaginons une hyperbole semblable à la première , & qui passe par le point O d'intersection des droites MN , GF ; supposant de plus que les diamètres CB , CR qui passent par les milieux K , I des sécantes, rencontrent cette nouvelle hyperbole aux points E , T ; & que par ces points on a mené les tangentes ED , TV qui seront aussi parallèles aux droites FG , MN .

T iv.

Par la propriété de l'hyperbole OTE, on aura
 $MO \times ON = TV^2$, & $GO \times OF = DE^2$; donc
 on aura cette proportion

$MO \times ON : GO \times OF :: TV^2 : DE^2$; par le 2. corol. de la
 précéd. prop. $TV^2 : DE^2 :: RS^2 : BL^2$. donc
 $MO \times ON : GO \times OF :: RS^2 : BL^2$. C. Q. F. 1^o D.

2^o Comme les lignes FG, MN sont coupées
 en deux également en K & en I, au lieu des
 rectangles $MO \times ON$, $GO \times OF$ on pourra pren-
 dre les expressions suivantes $MI^2 - OI^2$, $GK^2 -$
 OK^2 , qui leurs sont égales, par le lemme fon-
 damental, & de même au lieu des rectangles
 $MP \times PN$, $GQ \times QF$ on pourra prendre $MI^2 - PI^2$,
 & $GK^2 - QK^2$. Cela posé, l'hyperbole BRQ don-
 ne $MP \times PN$ ou $MI^2 - PI^2 = RS^2$, & $GQ \times QF$,
 ou $GK^2 - QK^2 = BL^2$: donc $MI^2 - PI^2 : GK^2 -$
 $QK^2 :: RS^2 : BL^2$; & comme la dernière raison de
 cette proportion est la même que celle de la
 dernière proportion du premier article de cette
 proposition, on aura $MI^2 - OI^2 : GK^2 -$
 $OK^2 :: MI^2 - PI^2 : GK^2 - QK^2$; ou *alternando*
 $MI^2 - OI^2 : MI^2 - PI^2 :: GK^2 - OK^2 : GK^2 - QK^2$;
 & *dividendo* $MI^2 - OI^2 - MI^2 + PI^2 : MI^2 -$
 $PI^2 :: GK^2 - OK^2 - GK^2 + QK^2 : GK^2 - QK^2$, ou
 bien *alternant & réduisant*, $PI^2 - OI^2 : QK^2 -$
 $OK^2 :: MI^2 - PI^2 : GK^2 - QK^2 :: RS^2 : BL^2$; or il
 est évident que $PI^2 - OI^2 = PO \times OT$, & que
 $QK^2 - OK^2 = OQ \times OX$: donc $PO \times OT : OQ \times$
 $OX :: RS^2 : BL^2$. C. Q. E. 2^o D.

Cette démonstration pourroit s'appliquer à tous
 les cas de cette proposition, en imaginant toujours

des hyperboles qui passent par les points d'intersection des droites FG, MN; de quelque maniere qu'elles soient disposées.

DÉFINITION.

416. Deux hyperboles sont *semblables*, lorsqu'on peut leur inscrire des figures semblables d'un même nombre de côtés.

PROPOSITION LI.

THÉORÈME.

417. Deux hyperboles ABDE, FGHI sont *semblables* lorsqu'elles sont décrites dans les mêmes asymptotes (fig. 110).

DEMONSTRATION.

Pour démontrer que des hyperboles décrites dans le même angle des asymptotes sont semblables; il n'y a qu'à faire voir qu'on peut leur inscrire des figures semblables d'un même nombre de côtés. Pour cela, par le centre C je mene deux diametres CF, CI qui rencontrent la premiere hyperbole aux points A, E & la seconde, aux points F, I: je tire les droites AE, FI. Je mene encore deux autres diametres CBG, CDH & je tire dans chaque hyperbole les cordes AB, BD, DE dans la premiere, & dans la seconde les cordes FG, GH & HI. Cela posé, je dis que le quadrilatere ABDE inscrit dans la premiere hyperbole, est semblable au quadrilatere FGHI inscrit dans la seconde: car les diametres CA, CB, CD, CE

sont proportionels aux diametres correspondants CF, CG, CH, CI de la seconde hyperbole (art. 413) & donnent $CA:CF::CB:CG$, donc AB est parallèle à FG : de même $CB:CG::CD:CH$, donc BD est parallèle à GH , on démontreroit de la même maniere que les lignes DE, HI ; AE, FI sont parallèles chacune à chacune. Il est de plus évident que les côtés AB, BD , &c. du premier polygone sont proportionels aux côtés correspondants du second polygone; car à cause des triangles semblables $CAB, CFG; CBD, CGH$ on aura les proport. suivantes $AB:FG::CB:CG$, & $CB:CG::BD:GH$; donc $AB:FG::BD:GH$; donc le quadrilatère $ABDE$ inscrit à la première hyperbole, est semblable au quadrilatère $FGHI$ inscrit à la seconde, puisque ces figures ont des angles égaux compris entre côtés proportionels; donc les hyperboles $ABDE, Fghi$ auxquelles ces figures sont inscrites, sont aussi semblables. C. Q. F. D,

COROLLAIRE I.

418. Donc toutes les hyperboles décrites dans le même angle, on entre les mêmes asymptotes, sont des figures semblables; & réciproquement toutes les hyperboles semblables peuvent avoir les mêmes asymptotes: car si cela n'étoit pas la proposition que l'on vient de démontrer seroit fausse.

COROLLAIRE II.

419. Donc toutes les hyperboles équilatères

sont des hyperboles semblables ; car il ne peut pas y avoir deux sortes d'angles droits.

COROLLAIRE. III.

420. Toutes les hyperboles semblables , étant dans le cas des autres figures semblables , & pouvant être regardées comme des polygones d'une infinité de côtés ; elles seront entr'elles comme les quarrés de leurs axes , des diametres correspondants , ou qui font les mêmes angles avec les asymptotes : en un mot elles seront entr'elles dans la raison des quarrés des tangentes , des sécantes ou cordes semblablement placées , des premiers ou seconds diametres correspondants , de leurs parametres , & en général de toutes les lignes disposées de la même maniere , dans chacune de ces courbes.

R E M A R Q U E.

421. Cette propriété est commune à toutes les sections coniques , c'est-à-dire qu'en général , deux sections coniques quelconques sont semblables , lorsqu'elles sont décrites dans un même angle. Car on peut déterminer dans l'ellipse des lignes qui répondent aux asymptotes de l'hyperbole. Ces lignes seroient celles qui passeroient par le centre & par les extrémités du petit axe élevé perpendiculairement au grand axe à l'origine de ce même axe ; & elles ont toutes les propriétés inverses des asymptotes de

l'hyperbole. Comme le centre d'une parabole considérée comme la dernière hyperbole possible, est sur l'axe de cette courbe prolongé à l'infini, il s'en suit que les lignes qui tiennent lieu d'asymptotes à la parabole sont deux lignes infinies & parallèles infiniment éloignées l'une de l'autre; puisque les deux branches de cette courbe s'éloignent continuellement l'une de l'autre: & de cette considération on peut conclure très-certainement que toutes les paraboles sont des figures semblables; puisqu'elles peuvent être regardées comme des hyperboles décrites entre les mêmes asymptotes. On peut aussi déduire de cette vérité, que toutes les paraboles décrites sur un même axe avec le même paramètre, sont asymptotes les unes par rapport aux autres; car nous avons démontré cette propriété pour toutes les hyperboles possibles.

PROPOSITION LII.

PROBLÈME.

422. Une hyperbole BL étant donnée, décrire dans le même angle des asymptotes, une autre hyperbole EG (fig. 107) qui soit à la première dans une raison donnée.

SOLUTION.

Supposons que le rapport donné soit celui de 2 à 3; c'est-à-dire que l'hyperbole donnée ne doive être que les deux tiers de l'hyperbole demandée. Par le centre C & un point B

quelconque de l'hyperbole donnée, on mènera un diametre CB prolongé indéfiniment au dedans de cette courbe, sur lequel on prendra une partie CP qui soit à CB dans la raison de 3 à 2; & l'on cherchera une moyenne proportionnelle CE entre CB & CP : cette droite fera un des diametres de l'hyperbole demandée, & le point E , un point de cette courbe par le moien duquel on pourroit la décrire par les propriétés des asymptotes. Cette solution porte sa démonstration avec elle; car 1^o les hyperboles sont semblables puisqu'elles sont décrites dans les mêmes asymptotes (art. 418); reste à faire voir qu'elles ont entr'elles le rapport de 2 à 3. Par construction $CB:CP::2:3$ & à cause de la progression géométrique $CB:CE::CE:CP$, on aura $CB^2:CE^2::CB:CP::2:3$; donc les hyperboles qui sont entr'elles dans la raison des quarrés de CB & CE sont aussi comme 2 à 3. C. Q. F. T. & D.

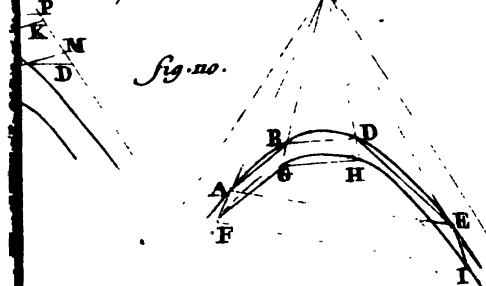
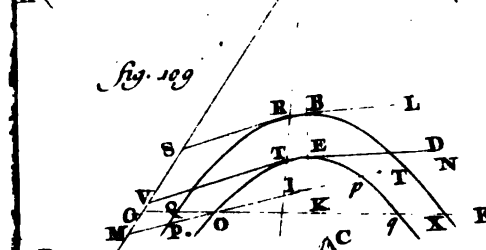
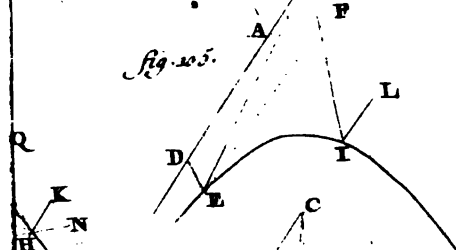
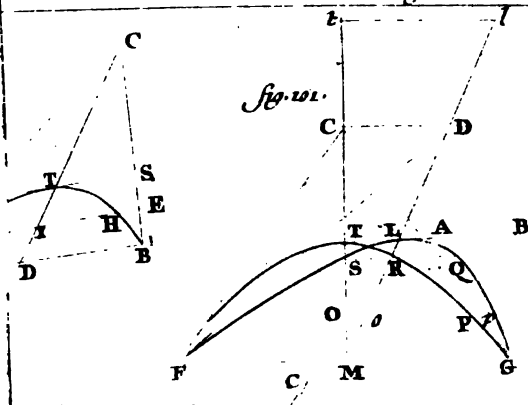
R E M A R Q U E.

423. On auroit pû se contenter de mener une droite FH parallèle à l'une des asymptotes, & de prendre sur cette ligne prolongée un point G , tel que l'on ait $FH:FG::2:3$; ce point auroit servi à décrire l'hyperbole demandée par le moyen des asymptotes; car les ordonnées FH , FG étant menées par le même point sont des ordonnées correspondantes de ces deux courbes, & doivent avoir entr'elles le même rapport que ces mêmes courbes, dont

elles sont les éléments. Il faut encore remarquer que l'hyperbole BH & le point G suffisent pour trouver tous les points de l'autre hyperbole EG . Il n'y a qu'à mener par le point G des droites quelconques nGN , mGM terminées à la première courbe, & prendre sur ces lignes les parties $gM = Gm$, $EN = Gn$; & les points E , g seront des points de la courbe demandée. Tout ce-ci est trop évident pour qu'on s'y arrête d'avantage; cette description se déduit immédiatement des propriétés des hyperboles asymptotes, & pourroit s'appliquer de la même manière aux autres sections coniques sans en excepter le cercle.

FIN DE L'HYPÉRBOLE.

ET DU TROISIÈME LIVRE.





AVERTISSEMENT.

OUTRE les descriptions particulieres géométriques & mécaniques des sections coniques, que je me suis proposé d'expliquer dans ce quatrième livre ; j'ai eu principalement en vûe la comparaison de ces courbes les unes avec les autres. J'ai crû que je pourrois y expliquer plus commodément certaines propriétés communes aux sections coniques, & dont il auroit été difficile de parler dans les livres précédents sans déranger l'ordre qui m'a paru le plus naturel. Quoique nous ayons examiné séparément chacune de ces courbes, on ne peut s'empêcher de reconnoître une certaine analogie qui regne entr'elles pour les propriétés des diametres, des parametres, des foyers particulièrement, & des sécantes intérieures ou extérieures & autres lignes que l'on peut appeller de même nom. Pour rapprocher d'avantage & mettre, pour-ainsi-dire, sous un seul point de vûe ces différents rapports, je commence par une description commune à toutes les sections coniques, & par la même raison, plus propre que toute autre à faire connoître comment on peut déduire ces courbes les unes des autres, &

AVERTISSEMENT.

comment on peut en simplifiant ou en compliquant une équation, passer, pour-ainsi-dire, de l'une à l'autre, sans avoir quitté la première. Comme les idées de l'infini entrent souvent dans ces espèces de transformations, & que d'ailleurs on ne doit pas prononcer hardiment sur l'infiniment grand & l'infiniment petit, la meilleure manière de s'assurer que l'on a bien jugé, est de voir si l'on peut déduire les mêmes conséquences de plusieurs principes différents: rien de plus satisfaisant que de voir comment toutes les constructions imaginables s'entendent, pour-ainsi-dire, à établir les mêmes vérités. Nous avons déjà remarqué que la parabole pouvoit être considérée comme une courbe qui tient le milieu entre l'ellipse & l'hyperbole; qu'on peut lui supposer deux foyers, ou tous les deux au-de-dans de sa concavité à une distance infinie l'un de l'autre, ou l'un au-de-dans & l'autre au-de-hors de cette courbe sur l'axe prolongé à l'infini. On verra cette propriété démontrée avec la dernière évidence & déduite immédiatement de cette construction. Comme la comparaison des sections coniques a été traitée amplement dans l'excellent ouvrage des sections coniques, de M. Le Marquis DE L'HOPITAL, & que cette partie n'est pas absolument essentielle dans des éléments, je ne suis point entré dans un plus grand détail sur les mêmes propriétés; & j'aurois supprimé entièrement cette première description, si je n'avois voulu donner aux commençants une idée de la comparaison des courbes que nous avons examinées séparément dans les trois premiers livres. J'ai tâché dans le

reste

AVERTISSEMENT.

reste du livre de donner les descriptions qui m'ont paru les plus expéditives & les plus abrégées selon les données du problème; persuadé que dans la pratique la facilité & la promptitude de l'opération, font tout le mérite des méthodes que l'on peut proposer. Toutes les machines dont je parle ensuite ont été tirées d'un livre latin de M. SCOOTEN professeur de mathématique à Leyde & connu particulièrement par son commentaire sur la géométrie de DESCARTES. Cet ouvrage intitulé *De organica sectionum conicarum descriptione*, n'a point encore été publié en entier dans aucun traité de sections coniques, quoique plusieurs aient donné quelques unes de ces machines. Après avoir parcouru ce petit traité, j'ai remarqué que toutes les machines qu'il donne sur la description de l'ellipse dont les diamètres conjugués sont déterminés de grandeur & de position, que toutes ces machines dis-je, sont déduites de principes différents, tandis qu'elles pouvoient toutes se conclure les unes des autres, & d'une proposition qui se trouve dans le petit traité de la description des sections coniques de M. DE LA HIRE. C'est pourquoi je n'ai point fait difficulté de profiter des découvertes de l'auteur sans m'astreindre à sa méthode. De cette manière j'évite l'examen d'une certaine machine par laquelle il commence, & qui devient très-ennuyeux par la multiplicité des cas qu'il faut examiner. A l'égard de toutes ces machines il faut convenir que la plupart deviennent presque inutiles dans la pratique à l'exception de celle qui est connue & exécutée sous le nom de compas elliptique universel; parcequ

AVERTISSEMENT.

les autres pour la plupart ne peuvent décrire que des portions d'ellipse ; mais on est dédomagé par la curiosité des machines , & par une connoissance plus étendue sur les propriétés des sections coniques décrites par des mouvements continus. Ce n'est pas même le seul avantage que l'on retire de la considération de ces machines. J'ose me flatter d'en avoir déduit des descriptions plus simples que celles que nous avons vues jusqu'ici , en ne faisant usage que d'une seule ouverture de compas pour déterminer tous les points de l'ellipse ; soit en me servant du petit ou du grand axe. Ce rayon est égal à la demi-différence des deux axes ; mais comme il pourroit devenir incommode & sujet à erreur dans les cas où cette différence est très-petite , je lui substitue la demi-somme , par le moyen de laquelle on trouvera tous les points très-distinctement. Quand aux descriptions de l'hyperbole , comme on ne peut pas en imaginer de plus courtes que celles qui sont connues de tout le monde & que l'on déduit des propriétés de cette courbe considérée entre ses asymptotes ; les machines que je donne ensuite ne sont que de pure curiosité , & peuvent se rapporter à la description par des points réduite à un mouvement continu. On peut aussi remarquer que ces machines reviennent entierement à ce que M. DESCARTES a dit sur la description de cette courbe dans sa Géométrie page 34. Je ne parle point des descriptions par les cordes , ou vulgairement appelées à la manière du Jardinier , parceque ces descriptions se trouvent dans tous les livres de sections coniques , & que d'ailleurs elles ne peuvent être pratiquées

AVERTISSEMENT.

dans les opérations qui demandent une grande précision, comme dans la coupe des pierres ou la construction des équations du troisième & quatrième degré. C'est par la même raison que j'ai supprimé entièrement le compas parabolique du même auteur qui m'a paru trop compliqué pour être d'aucun usage. Cette partie ayant un rapport direct à tout ce qui s'appelle pratique, peut être regardée comme une des plus importantes de la géométrie, c'est pourquoi je m'y suis appliqué particulièrement & je n'ai point appréhendé d'entrer dans certain détail, qui ne sera certainement pas trop long pour ceux qui veulent joindre aux méthodes la connoissance des principes sur lesquelles elles sont appuyées. J'ai eu principalement en vûe les Appareilleurs qui se trouvent souvent dans le cas de décrire des ellipses sur deux axes donnés, quoique cette courbe ne soit plus d'un usage aussi fréquent, depuis qu'on lui a substitué l'anse de panier à trois centres & dont les trois arcs sont chacun de 60 degrés. il seroit inutile de m'étendre ici sur toutes les parties des mathématiques dans lesquelles la description des sections coniques peut avoir lieu. Il suffit de dire en deux mots qu'on ne peut faire un pas dans la géométrie tant soit peu supérieure aux éléments sans en avoir besoin, & ce seroit perdre son temps que d'entreprendre de prouver l'utilité de ces courbes lorsqu'elle est aussi généralement reconnue.

On sera peut-être surpris de trouver au commencement de ce quatrième livre une démonstration algébrique après avoir annoncé un traité synthétique, mais je prie de faire attention que ceux qui voudroient sen-

AVERTISSEMENT.

s'en tenir à la première , pourront passer la seconde , qui m'a paru absolument nécessaire pour satisfaire ceux qui désirent toujours la dernière certitude dans une démonstration. D'ailleurs le calcul est assez simple pour être à la portée de ceux qui n'auroient que la connoissance des premiers éléments d'algèbre.





DE LA DESCRIPTION
GÉOMÉTRIQUE ET MÉCHANIQUE
DES SECTIONS CONIQUES:

LIVRE QUATRIÈME.

PROBLÈME I.

424.



AXE IT d'une section conique quelconque & ses foyers F, f étant donnés (fig. 111, 112, 113) (décrire chacune de ces courbes par une méthode uniforme pour toutes les trois.

SOLUTION POUR LA PARABOLE.

425. Par le point *T* origine de l'axe on élèvera une droite *TG* égale à la distance du même point *T* au foyer *F* : sur le prolongement de l'axe on prendra *TR* égal à *TG* : ayant ensuite mené la droite *RGD* par les points *R, D* ; par tant de points que l'on voudra, on tirera parallèlement à *TG* les droites *OD, FM, OD, OD, &c.* terminées à la ligne *RD* aux points *D, M, D, D.* Ensuite du point *F* comme
V iij.

centre avec le rayon OD on décrira sur chaque OD prolongée de part & d'autre de l'axe, des arcs de cercle P, p qui donneront sur ces lignes les points de la parabole demandée.

DÉMONSTRATION.

Par le point R soit menée parallèlement à TG la droite RS , que nous avons déjà nommée directrice (*art. 1*) : d'un point quelconque P soit menée une droite PQ parallèle à l'axe TF , & par conséquent perpendiculaire sur la directrice : à cause des parallèles DO, TG les triangles RTG, ROD sont semblables & donnent $RT : TG :: RO : OD$; mais $RT = TG$ par construction, donc $RO = OD$ ou FP : de plus RO est évidemment égal à PQ à cause du rectangle RP ; donc la courbe est une parabole, puisque les distances d'un de ses points à la directrice & au foyer sont égales, & que cette propriété est la définition même de la parabole *art. premier*. C. Q. F. D.

SOLUTION POUR L'ELLIPSE.

426. Aux extrémités I, T de l'axe IT , on élèvera les perpendiculaires à cet axe $TG=TF$ & $IL=IF$; par les points G, L on fera passer une droite GL qui rencontrera le prolongement de l'axe en un point R . Par des points O, O, O pris comme l'on voudra, on élèvera les perpendiculaires OD, OD, OD terminés à la ligne GL : du point F comme centre sur

chaque OD , on décrira un arc de cercle P qui marquera sur cette ligne un des points de l'ellipse demandée.

Si l'on prend sur GT prolongée une partie $Gl=IL$, & sur IL aussi prolongée une partie $lg=TG$; après avoir tiré lg qui rencontre l'axe prolongé en r , il est aisé de voir que l'on pourra par le moyen du foyer f & des OD prolongées en d , décrire une courbe semblable à celle qui passe par les points D , D &c.

Il faut encore remarquer que les droites GL , gl sont parallèles, car les droites Gl , gL sont égales & parallèles, *par construction* : de plus les droites Gl , gL ainsi que les parallèles Dd sont toutes égales au grand axe IT ; car $TG=TF$, & $Tl=Fl$, donc $TG+Tl=TF+Fl=IT$. Cela posé il sera facile d'entendre la démonstration.

DÉMONSTRATION.

Par construction le point P déterminé sur chaque OD par le moyen du foyer F est éloigné du même foyer F de la quantité OD , ce qui donne $PF=OD$; & le point p déterminé sur la même ligne OD prolongée en d , par le moyen du foyer f , est éloigné du foyer f d'une quantité $pf=Od$; donc on aura PF , ou $pF+pf=dD=IT$. Donc le point p ou P est à l'ellipse dont IT est l'axe & dont les points F , f sont les foyers. C. Q. F. D.

On pourroit objecter contre cette démonstration, que nous avons supposé que les cercles décrits des points F , f comme centre avec les

rayons OD , Od se coupent aux points P , p ; & que si cela n'arrivoit pas la courbe ne seroit pas une ellipse. On pourroit s'en convaincre par induction de plusieurs manières, mais comme cette méthode souffriroit peut-être encore quelque difficulté, j'ai mieux aimé démontrer cette partie par algèbre, parceque la démonstration synthétique auroit pû devenir trop compliquée en voulant démontrer les choses rigoureusement.

427. Pour démontrer que les cercles décrits des points F , f comme centre avec les rayons OD , Od se coupent en un même point P ou p à droite & à gauche de l'axe, il n'y a qu'à faire voir que les côtés OP , Op , des triangles rectangles FOP , fOp sont égaux. Pour cela soient nommées les lignes connues $IT = 2a$; TF ou $If = c$; FI sera $2a - c$. Les lignes TG , IL seront aussi c , & $2a - c$: la ligne TR sera nommée z , & TO sera x ; donc IO sera $2a - x$. Cela posé pour avoir z , on se servira des triangles semblables RTG , RIL qui donnent $RT:TG::RI:IL$, ou analytiquement $z:c::2a-z:2a-c$, d'où l'on tire $2ac - cz = 2az - cz$, donc en faisant passer $-cz$ dans le second membre $2ac = 2az - cz$ donc $z = \frac{2ac}{2a-c} = \frac{ac}{a-c}$: présentement pour avoir OD ou PF on se servira des triangles semblables RTG , ROD qui donnent $RT:TG::RO:OD$ ou PF , & analytiquement

$$\frac{ac}{a-c} : c :: \frac{ac}{a-c} + x : \frac{ac}{a-c} = \frac{ac + ax - cx}{a-c}$$

en multipliant le numérateur & le déno-

minateur par $a - c$ & divisant chaque terme par c .

Le carré de FP ou de la ligne OD sera donc

$$\frac{c^2c^2 + a^2x^2 + c^2x^2 + 2acx - 2acx - 2acx}{a^2} ; \text{ comme } FO \text{ est}$$

égale à $c - x$, son carré sera $cc - 2cx + xx$;

ou en réduisant à la dénomination du carré de FP ,

$$\frac{c^2c^2 - 2acx + ax^2}{a^2} . \text{ Donc on aura } EP^2 - FO^2 \text{ ou } PO^2 =$$

$$\frac{a^2c^2 + a^2x^2 + c^2x^2 + 2a^2cx - 2a^2cx - 2acx^2 - a^2c^2 + 2a^2cx - a^2x^2}{a^2}$$

ou en effaçant ce qui se détruit

$$PO^2 = \frac{c^2x^2 + 4a^2cx - 2acx - 2acx}{a^2} .$$

Pour avoir Od ou pf , je fais attention qu'en étant OD de Dd ou de IT qui lui est égal, j'aurai la valeur de cette ligne $Od = 2a - \frac{ac - ax + cx}{a}$; &

en réduisant $2a$ au même dénominateur, $Od =$

$$\frac{2a^2 - ac - ax + cx}{a} ; \text{ donc le carré de } Od \text{ ou } pf \text{ sera}$$

$$\frac{4a^4 + a^2c^2 + a^2x^2 + c^2x^2 - 4a^3c - 4a^3x + 4a^2cx + 2a^2cx - 2ac^2x - 2acx^2}{a^2} .$$

fo se trouve égale à $2a - c - x$; donc

$$fo^2 = 4a^2 - c^2 - x^2 - 4ac - 4ax + 2cx ,$$

ou en lui donnant a^2 pour dénominateur

$$fo^2 = \frac{4a^4 + a^2c^2 + a^2x^2 - 4a^3c - 4a^3x + 2a^2cx}{a^2} . \text{ si l'on retran-}$$

che le carré de fo de celui de fp , on aura

$$PO^2 = \frac{c^2x^2 + 4a^2cx - 2acx - 2acx}{a^2} ; \text{ après avoir effacé ce}$$

qui se détruit. Cette valeur étant évidemment la même que celle de PO , il s'en suit que les cercles décrits des points f , F comme centre, avec les rayons OD , Od se coupent aux mêmes points P , p sur la droite Dd dont les parties OD , Od ont servi servi de rayon. C. Q. F. D.

Ce seroit la même démonstration si le point O avoit été pris entre les deux foyers F , f , au lieu d'avoir été pris entre le foyer F & le point T , comme on le suppose ici.

D É F I N I T I O N :

428. Si l'on mène par les points R, r des droites RS, rs perpendiculaires à l'axe IT , ces lignes sont appelées *directrices* de l'ellipse $TMPIg$.

C O R O L L A I R E I.

429. Il suit de cette description de l'ellipse & de la définition précédente, qu'on pourroit la regarder comme une courbe dont chaque point P ou p est placé de manière, que ses distances l'une PF au foyer l'autre PQ à la directrice, sont toujours dans un rapport constant, qui est celui de TG à RT ; car à cause des triangles semblables ROD, RTG on a $TG:RT::OD:OR$; mais $PF=OD$, par construction, & $OR=PQ$ à cause du rectangle $PQRO$: donc $TG:RT::PF:PQ$. Il faut entendre la même chose du même point P par rapport au foyer f & à la directrice rf ; car il est évident que l'on a pf ou $Od:Or::Ig:Ir$, puisque l'on peut déduire cette proportion de la similitude des triangles Ilg, rOd .

C O R O L L A I R E II.

430. Il suit encore de-là que l'on peut considérer le cercle comme une espèce d'ellipse dont les directrices sont infiniment éloignées l'une de l'autre, & chacune à une distance infinie du foyer; car puisque dans le cercle les FP sont toutes égales entr'elles, il faut pour conserver le rapport constant, que les PQ soient aussi

toutes égales entr'elles; ce qui ne peut arriver à moins qu'on ne les suppose toutes infinies ou, ce qui revient au même, à moins que la directrice ne soit à une distance infinie du foyer qui devient le centre du cercle.

SCHOLIE.

431. Il est aisé de reconnoître que la courbe ne peut avoir aucun de ses points au-de-la des extrémités de l'axe IT . Car si l'on mène une ligne doD entre les points R , T ; il est aisé de voir que la ligne od , est plus courte que fo , & partant le cercle décrit du rayon od ne pourra pas couper ni même toucher la ligne doD en aucun point; pour s'en convaincre on fera attention que les fO croissent plus rapidement que les Od , parceque leurs accroissements oT , dK sont dans la raison de rI à Ig , comme il est évident à cause des triangles semblables rig , IKd & puisque d'ailleurs RI est plus grand que Ig , par la même raison que rT est plus grand que Tl : donc puisque $Tf = Tl$ (construction), en ajoutant une plus grande ligne oT à Tf que celle dK que l'on ajoute à Ko , on aura fo plus grand que od ; ce qui suffit pour que l'ellipse soit fermée en T ; on feroit voir de la même maniere qu'elle est fermée en I ; tout cela ne souffre aucune difficulté.

SOLUTION POUR L'HYPÉRBOLÉ.

432. Aux extrémités I , T de l'axe donné on élèvera les droites $IL = IF$ & $TG = TF$ perpen-

diculaires à l'axe l'une d'une côté & l'autre de l'autre côté du même axe. On menera la droite LG prolongée indéfiniment, ensuite par tant de points O , qu'on voudra on menera des perpendiculaires OD à l'axe terminées en D à la ligne LG , & indéfinies de l'autre côté de l'axe, sur lesquelles on marquera les points P, p en décrivant du foyer F des arcs de cercles sur chacune avec le rayon égal à la ligne OD sur laquelle on les décrit. Je dis que ces points seront à une hyperbole dont IT est l'axe & F, f les foyers

DÉMONSTRATION.

On fera attention que l'on auroit pû prendre $Ig = If$ & $Tl = fT$, & qu'en tirant gl qui se trouve parallèle à GL , on auroit pû déterminer les points P, p par le moyen de cette ligne gl , du foyer f & des lignes Od, Od . Car on feroit voir comme dans l'ellipse (*art. 427.*) que les cercles décrits des rayons OD, Od & des foyers F, f comme centre, se coupent aux mêmes points P, p sur la même ligne ODd dont les parties ont servi de rayon; on remarquera de plus que les parallèles Dd sont toutes égales à l'axe IT car on a (*par construction*) $Tl = Tf$ & $TG = TF$ ou If ; donc $Tl - TG = Tf - fI = IT$ & partant toutes les parallèles Dd qui sont égales à Gt seront aussi égales à l'axe IT . Cela posé parceque le point P a été déterminé par le foyer F & la ligne GL , on a $FP = OD$, & parceque ce même point P auroit pû être déterminé par

la ligne gl & le foyer f , on aura $Pf = Od$, donc $Pf - PF = Od - OD = Dd$ ou IT , donc la courbe est une hyperbole, puisque la différence des distances d'un de ses points aux foyers est toujours égales à l'axe IT . C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

433. Il suit de cette construction qu'ayant mené par les points R , r de l'axe les perpendiculaires RS , rs que nous appellerons *directrices* de l'hyperbole, il suit dis-je que cette courbe est telle que les distances de chacun de ses points l'une PF au foyer, l'autre PQ à la directrice, sont toujours entr'elles dans un rapport constant qui est celui de TG à RT . Car à cause des triangles semblables RTG , ROD on a $TG:RT::OD:RO$, mais $OD = FP$ & $RO = PQ$ donc $TG:RT::FP:PQ$. On démontreroit de même que $Pf:Pq::Tl:Tr$ ou $::TG:TR$ en se servant des triangles semblables rOd , RTG .

COROLLAIRE II.

434. Il suit enoore de-là que les OD ou les Od croissent plus rapidement que les FO ou les fO correspondantes. Car puisque $IL = IF$; on aura IL plus grand que IR & à cause des triangles semblables RTG , RIL ; TG sera plus grand que RT ; donc si l'on tire IK parallèle à l'axe IT on aura encore à cause des triangles semblables IKd , RTG , dK plus grand que Kl , ce qui fait voir que la ligne Tl devenue Fd a plus

augmenté que la ligne RT devenue RF ; & comme les OD ou les Od croîtront toujours plus rapidement que les FO ; il suit de-là que les cercles décrits du point F comme centre avec le rayon OD couperont toujours les lignes OD en quelque point, & par conséquent l'hyperbole s'étend à l'infini à droite & à gauche de l'axe. Par la même raison, les oD prises du côté du foyer f seront toujours plus grandes que les Fo ; puisque FI est égale à IL ; & partant l'hyperbole s'étend aussi à l'infini du côté du foyer f .

SCHOLIE.

435. On démontreroit aussi par le même principe, que l'hyperbole ne peut avoir aucun de ses points sur les $O'D'$ qui se trouveroient entre les points I, T ; car $O'D'$ est alors plus petit que FO' , & $O'd'$ est plus petit que fo' , ce qui suffit pour qu'on ne puisse trouver aucun point de l'hyperbole.

COROLLAIRES ET PROPRIÉTÉS.

Communes à toutes les Sections coniques déduites de la construction précédente.

COROLLAIRE I.

436. Il suit de ce que nous venons de voir, qu'on peut appeller section conique toute courbe telle que les distances de chacun de ses points l'une PF au foyer F , l'autre PQ à la directrice de cette courbe sont toujours dans un rapport

constant. La section sera une parabole, si le rapport est celui d'égalité; une ellipse, si PF est plus petit que PQ ; une hyperbole, si PF est plus grande que PQ .

COROLLAIRE II.

437. Donc une section conique est une parabole, une ellipse, ou une hyperbole selon que le foyer est autant, moins, ou plus éloigné du sommet que la directrice; car dans la parabole $TF = RT$ dans l'ellipse $TF < RT$, & dans l'hyperbole $TF > RT$. On peut encore dire qu'une courbe sera une parabole, une ellipse, ou une hyperbole, lorsque l'angle TRG sera égal, plus petit, ou plus grand qu'un angle de 45 degrés; cela revient précisément au même.

COROLLAIRE. III.

438. L'Angle GRT ne peut croître que depuis zéro jusqu'à 90 degrés; nous avons déjà vu (art. 430) que dans le cas où cet angle est infiniment petit, l'ellipse devient un cercle: si cet angle est presque égal à 90 degrés; il est le plus grand possible; & alors l'hyperbole devient une ligne droite: pour s'en convaincre, on remarquera que si l'angle GRT est presque droit la ligne GR sera presque parallèle à la ligne GT & partant les lignes FR , FM ne concourent qu'à une distance infinie, donc la courbe devient une ligne droite. On peut encore reconnoître cette vérité d'une autre manière.

l'angle *GRT* & son opposé au sommet *IRL* ne peuvent presque être droits que les lignes *RT*, *RI* ne sont infiniment petites par rapport aux lignes *GT*, *IL* qui sont les distances des extrémités de l'axe au foyer *F*; donc l'axe *IT* sera infiniment petit par rapport à ces distances & pourra être regardé comme zero, & supposant toujours que la courbe est une hyperbole si l'on mène d'un point *P* aux foyers *F*, les lignes *PF*, *Pf* on aura $PF - Pf = IT = 0$; donc $PF = Pf$, c'est-à-dire que l'hyperbole devient une ligne droite. On peut conclure de-là que la courbure d'une hyperbole sera d'autant moindre que les foyers seront à une plus grande distance du sommet & que l'axe sera plus petit.

COROLLAIRE IV.

439. Il suit encore de-là que le cercle & la ligne droite sont les deux extrêmes de toutes les sections coniques, dont la parabole est le milieu; puisque le cercle répond à l'angle *GRT* infiniment petit la parabole a cet angle supposé de 45 degrés, & la ligne droite a un angle droit.

COROLLAIRE V.

440. Si l'on fait attention à la manière dont on a déterminé la ligne *GL* dans l'ellipse & dans l'hyperbole, on verra encore aisément que la parabole tient le milieu entre l'ellipse & l'hyperbole, ou ce qui revient au même, que l'on

peut

peut supposer à cette courbe deux foyers, tous les deux au-de-dans de l'axe à une distance infinie l'un de l'autre; auquel cas la parabole est la dernière des ellipses possibles; ou, l'un au-dedans & l'autre au-dehors sur l'axe prolongé à l'infini; & dans ce cas elle peut être regardée comme la première hyperbole possible. Pour avoir les deux points G, L de la ligne RGK dont le prolongement ou l'intersection avec l'axe détermine l'origine de la directrice; aux extrémités I, T de l'axe on a élevé les perpendiculaires GT, IL égales aux distances TF, IF ; mais dans la parabole FI est infinie; donc IL est aussi infinie & le triangle rectangle RIL devient isocèle, puisque RF étant une quantité finie ajoutée ou retranchée d'une grandeur infinie ne peut y faire de changement: donc l'angle TRG doit être de 45 degrés. C'est ce que l'on peut reconnoître par l'expression de RT trouvée à l'article 427, où nous avons τ ou $RT = \frac{a^2}{c}$; dans le cas de la parabole $a=c$ devient, a puisque c qui est TF étant d'une grandeur finie combinée avec l'infini par soustraction ou par addition ne peut l'augmenter ni le diminuer: donc $TR = \frac{a^2}{a} = a$ ou TF .

COROLLAIRE. VI.

441. Dans une section conique quelconque, la droite RGL est évidemment tangente à la courbe à l'extrémité M de l'ordonnée FM qui passe par le foyer. Car il est évident que lorsque OD devient FM , la ligne FP devient

aussi FM , & partant le point M le seul qui puisse appartenir à la courbe & à la droite RGM .

COROLLAIRE VII.

442. Il suit encore de - là que toutes les sections coniques décrites dans un même angle GRT , ou dans des angles égaux, seront des courbes semblables ; car de cette supposition il suit clairement que leurs axes seroient proportionnels aux distances des foyers : c'est pour cette raison que tous les cercles & toutes les paraboles sont des figures semblables, parceque tous les angles de 45 degrés sont égaux, & que toutes les lignes parallèles font des angles égaux entr'elles, puisqu'elles sont toutes censées ne concourir qu'à l'infini.

COROLLAIRE VIII.

445. Il suit encore de-là que si l'on a, dans une section conique quelconque, la directrice & l'axe de cette courbe, on pourra aisément déterminer les foyers de chacune : il n'y aura qu'à diviser l'axe donné IT dans la raison de RT à RI , ou, ce qui est la même chose, il n'y aura qu'à faire cette proportion $RT:IR::FT:FI$: or on sçait, par les éléments, couper une ligne quelconque dans une raison donnée : donc on pourra trouver les foyers par la connoissance de l'axe & de la directrice. Dans le cercle les lignes RT , IR sont égales & infinies ; ainsi $FT=FI$: donc le cercle n'a qu'un foyer qui

est au milieu de son diamètre ; au lieu que l'ellipse & l'hyperbole en auront toujours deux, parceque l'on peut toujours diviser une ligne donnée en raison donnée de deux manieres, & qu'il n'y en a qu'une pour la diviser en deux parties égales. Dans la parabole $IR = FI$, puisque ces deux lignes sont infinies : donc $RT = FT$: ainsi cette analogie est vraie pour toutes les sections coniques.

Je n'insisterai pas davantage sur la comparaison des sections coniques ; je passe à d'autres descriptions qui sont plus commodes dans la pratique, & par conséquent préférables à celle-ci.

PROBLÈME II.

444. Deux diamètres conjugués quelconques d'une section conique étant donnés de grandeur & de position ; décrire chacune de ces courbes.

SOLUTION POUR LA PARABOLE.

445. Comme cette courbe n'a point de diamètres conjugués, le problème général, que nous venons de proposer, se réduit à celui-ci.

Un diamètre quelconque AG , son paramètre AB & l'angle PAB des ordonnées à ce diamètre étant donnés ; décrire la parabole (fig. 114).

Par le point B origine du diamètre BI , on élèvera une perpendiculaire BE à ce même diamètre : ensuite avec des rayons variables tels que CA , BA , AA on décrira des demi cercles

tels que ACG , ADH , AEI qui couperont le diametre aux points G , H , I & la perpendiculaire au diametre aux points C , D , E ; par les points G , H , I du diametre on menera des lignes indéfinies lGL , mHM , nIN parallèles à AP , sur lesquelles on prendra, à droite & à gauche du diametre, les lignes GL , HM , IN égales aux parties BC , BD , BE de la ligne BK , & formées sur cette ligne par les cercles correspondants; je dis que la courbe qui passera par tous les points L , M , N sera une parabole.

D É M O N S T R A T I O N.

Par la propriété du cercle $BC^2 = AB \times BG$, & de même $BD^2 = AB \times BH$, & par la même raison $BE^2 = AB \times BI$: donc on aura $BC^2 : BD^2 : BE^2 :: AB \times BG : AB \times BH : AB \times BI$, ou, en divisant par la ligne AB , & mettant au lieu de BC^2 , BD^2 , BE^2 leurs égales GL^2 , HM^2 , IN^2 , on aura $GL^2 : HM^2 : IN^2 :: BG : BH : BI$; c'est - à - dire que les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les abscisses: donc la courbe est une parabole, de plus cette parabole a pour parametre la ligne AB , puisque $GL^2 = AB \times BG$, & d'ailleurs les ordonnées sont avec le diametre l'angle demandé; puisqu'elles sont parallèles à AP , donc cette parabole a toutes les conditions requises. C. Q. F. T. & D.

S C H O L I E.

446. Il est aisé de voir que cette construction

pourroit avoir lieu dans le cas où le diamètre donné seroit l'axe: il n'y a dans ce cas qu'à mener des lignes GL , HM perpendiculaires à cet axe, & achever le reste comme dans la construction précédente.

447. Si au lieu du parametre on donnoit un point de la parabole; on pourroit décrire la courbe demandée de plusieurs manieres.

SOLUTION. I.

Soit la ligne AH le diamètre donné (fig. 115) la ligne AT tangente à l'origine de ce diamètre, & qui détermine l'angle des ordonnées avec le point P , que l'on suppose un point de la parabole. On prolongera le diamètre vers D , & l'on prendra sur le prolongement les parties AB , BC , CD égales entr'elles & de quelle grandeur on voudra; par le point P , on menera une droite PS terminée à la tangente AT en S , & parallèle à AH ; à commencer du point S en allant vers P , on prendra des lignes Sb , bc , cd égales entr'elles & aux parties AB , BC , CD . Par le point A , & les points b , c , d on tirera les droites indéfinies Ab , Ac , Ad ; par le point P & les points B , C , D on menera pareillement les droites PB , PC , PD qui couperont les premières aux points R , N , M ; si l'on fait passer une courbe par ces points & tous les autres trouvés de la même manière, je dis que ces points seront à une

parabole, dont AH est un diametre & dont le point P est un des points de la courbe.

DÉMONSTRATION.

Par le point M , où la ligne PB coupe la ligne Ab , soit menée la ligne MF parallèle au diametre AH & la droite MO parallèle à AS ; à cause des triangles semblables AFM , ASb ; BAM , PbM on a ces deux proportions, $FM:Sb$ ou $AB::AF:AS$, & $AB:Pb::AM:Mb$, donc on aura *componendo*

$AB:AB+Pb::AM:AM+Mb$; & *reduisant*, $AB:PS::AM:Ab::AF:AS$; car il est évident que $AB+Pb=Sb+Pb$ puisque $AB=Sb$, *par construction*, donc on aura ces deux proportions;

$$FM:AB::AF:AS$$

$$AB:PS::AF:AS$$

& en les multipliant par ordre, on aura, après avoir divisé chaque terme de la premiere raison par AB , $FM:PS::AF^2:AS^2$. Mais à cause des des parallélogrammes AM , AP ; $AF=MO$ & $AS=PK$, & de même $FM=AO$, & $PS=AK$; donc $AO:AK::OM^2:PK^2$, d'où il suit évidemment que la courbe est une parabole, puisque les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les abscisses correspondantes; d'ailleurs ces ordonnées sont parallèles à TA & font avec le diametre un angle égal à l'angle demandé; donc cette parabole est la parabole qu'il falloit décrire. C. Q. F. T. & D.

Si le point d'intersection se trouvoit au-de-là du point *P* par rapport au diamètre, comme en *R*; alors la ligne *SP* est plus petite que la ligne *Sd*: ainsi au lieu d'un *componendo* il faut faire un *dividendo*; d'ailleurs la démonstration est toujours à peu près la même; car à cause des triangles semblables *ATR*, *ASd*, on a $TR : Sd \text{ ou } AD :: AT : AS$; & à cause des triangles sembl. *DAR*, *PdR* on a $AD : Pd :: AR : dR$; donc *dividendo* $AD - Pd \text{ ou } Sd - Pd : AD :: AR - dR : AR$ & réduisant $SP : AD :: Ad : AR :: AS : AT$, d'où l'on déduit $AD : SP :: AT : AS$; mais on avoit ci - devant $TR : AD :: AT : AS$, donc multipliant par ordre, & divisant les deux premiers termes par *AD*, $TR : SP :: AT : AS$, d'où il suit que le point *R* est encore à la parabole, puisque les carrés AT^2 , AS^2 , ou leurs égaux RH^2 , PK^2 sont entr'eux comme les abscisses correspondantes *AH*, *AK* égales aux lignes *TR*, *PS* qui leur sont parallèles.

R E M A R Q U E

Sur cette première solution.

448. Nous avons trouvé dans cette démonstration les deux proportions suivantes $FM : AB :: AF : AS$, & $AB : PS :: AF : AS$; donc $FM : AB :: AB : PS$; donc $AB^2 = FM \times PS = AO \times AK$ puisque les lignes *FM*, *PS* sont égales respectivement aux lignes *AO*, *AK* auxquelles elles sont parallèles. Il suit de-là, que si par les points *P*, *M* où une sécante coupe une parabole on mène à un diamètre quelconque les ordonnées *PK*, *MO*; la partie *AB* du diamètre

prolongé comprise entre son origine & la rencontre de la sécante, est moyenne proportionnelle entre les deux abscisses AO , AK . Donc si la sécante se meut parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle devienne tangente, la partie du diamètre comprise entre l'origine de ce diamètre & la tangente, sera égale à l'abscisse de l'ordonnée menée par le point de contact: c'est ce que nous avons déjà démontré en faisant voir que toute sou-tangente est double de l'abscisse dans la parabole.

II SOLUTION.

449. Par le point P on menera la ligne PKp ; parallèle à la tangente AS (fig. 116); sur laquelle on prendra $Kp=KP$, & après avoir tiré les lignes AP , Ap ; par des points B , C , D pris comme l'on voudra sur la ligne PK , on menera les droites BM , CN , DO parallèles au diamètre donné AK & qui couperont le côté AP aux points E , G , I par lesquels on menera parallèlement au côté Pp les droites EF , GH , IL terminées au diamètres AK aux points L , H , F : enfin par le point p & les mêmes points L , H , F on menera les droites pFO , pHV , pLM qui donneront sur les droites DE , CG , BI , les points O , N , M de la parabole de mandée.

La démonstration de cette solution est précisément la même que celle de la dernière proposition de la parabole; c'est pourquoi nous ne la répéterons pas ici. (voyez l'art. 113).

REMARQUE

sur cette seconde Solution.

450. Comme cette solution est une description des plus simples de la parabole, il est apropos de s'en servir préféablement aux autres. Ainsi quoique nous n'ayons pas supposé la connoissance des foyers, ou d'un diametre quelconque & de son parametre, on pourra en faire usage dans ces différens cas; car le parametre détermine la parabole, comme le point que l'on a supposé donné, pourvu qu'on ait aussi l'angle des ordonnées. Il faut entendre la même chose de la connoissance du foyer sur l'axe dont l'origine est déterminée; d'où il suit que l'on pourra se servir de cette construction dans presque tous les cas possibles.

Nous ne parlerons point des machines qui ont été imaginées pour la description de cette courbe: elles sont si imparfaites dans la pratique, que l'on doit préférer les descriptions par des points, à des mouvemens continus.

SOLUTION POUR L'ELLIPSE.

451. Soient AB , DE (fig. 117 & 118) deux diametres conjugués donnés de grandeur & de position, on demande de décrire l'ellipse par plusieurs points.

I SOLUTION.

Par l'extrémité D de l'un des diametres donnés soit menée la ligne DP perpendiculaire à

son conjugué AB . On prolongera cette ligne d'une grandeur indéfinie (*fig. 118*) & l'on prendra sur cette perpendiculaire DP , audessus ou audessous du point D , une partie DQ égale à la moitié du diamètre AB : ensuite par le centre C & le point Q on tirera la ligne CQ prolongée indéfiniment à droite & à gauche du centre C : par un point O du diamètre DE ayant mené les lignes droites OS parallèle à CA & OI parallèle à DP , du point G où cette ligne rencontre CQ comme centre, avec un rayon $GS=CA$, on décrira un arc de cercle vers S qui coupera la ligne OS dans un point S ; je dis que ce point appartient à l'ellipse dont AB , DE sont les diamètres conjugués.

DEMONSTRATION.

A cause des triangles semblables CDQ , COG formés par les parallèles DQ , GO on a $CD^2:CO^2::DQ^2$ ou GS^2 ou $CA^2:OG^2$; mais à cause du triangle rectangle GOS on aura aussi $OG^2=GS^2-OS^2$, & parceque $CA=GS$ & que $CR=OS$ à cause des parallèles CD , RS qui les renferment, on aura $OG^2=CA^2-CR^2=AR \times RB$: donc en mettant RS^2 à la place de CO^2 , & $AR \times RB$ à celle de OG^2 , la première proportion deviendra $CD^2:RS^2::CA^2:AR \times RB$, ou *alternando & invertendo* $RS^2:AR \times RB::CD^2:CA^2$; d'où il suit évidemment que la courbe est une ellipse. C. Q. F. D.

• R E M A R Q U E

• *sur cette premiere Solution.*

On remarquera en général sur cette premiere solution, que la ligne RS parallèle à CD coupera toujours le diametre AB dans un point R, entre le centre C & son extrémité A : car à cause du triangle rectangle GOS, GS est plus grand que SO, côté de l'angle droit dont GS est l'hypotenuse ; donc CA qui est égale à GS, sera aussi plus grand que CR, ou son égale OS.

I I S O L U T I O N.

452. Après avoir déterminé la ligne CQ comme dans la solution précédente ; (fig. 117 & 118) par quelque point G de cette ligne pris pour centre avec un rayon $GF = PQ$ on décrira un arc de cercle qui coupera le diametre AB, prolongé s'il est nécessaire, dans un point F ; si l'on tire FG & qu'on prenne sur le prolongement de cette ligne $GS = DQ$, le point S sera un des points de l'ellipse demandée.

D É M O N S T R A T I O N.

Soit menée par le point G la ligne IGO parallèle à DP ; les parallèles DP, OI seront coupées proportionnellement par la droite CQ & donneront $PQ:GI::DQ:OG$; mais, par hypothèse $GF = PQ$ & $DQ = GS$ ou CA, donc $GF:GI::GS:GO$, d'où il suit que la ligne OS

qui joint les points O , S est parallèle au diamètre; & partant cette construction revient à la précédente, & le reste se démontreroit de la même manière.

SCHOLIE.

453. Comme le cercle décrit du rayon $GF=PQ$ coupe toujours la ligne AB en deux points; tant que le point G ne se trouve pas dans la perpendiculaire PQ , on aura par une même opération deux points au-dessus du diamètre AB ; il n'est pas moins évident que l'on peut trouver deux points au-dessous du même diamètre; en prenant les points G sur le prolongement de la ligne Cq comme en g . Il suit encore de cette construction que le lieu de tous les points G est compris entre le point C & le point Q ; car si on les prenoit au-delà de Q par rapport au centre C , le rayon GF ne pourroit plus couper ni toucher le diamètre AB , & partant on ne pourroit plus trouver aucun point à la courbe.

I. OBSERVATION.

454. Il est aisé de reconnoître que l'on peut encore se servir de cette construction, dans le cas où les lignes AB , DE seroient les axes de l'ellipse (*fig. 119 & 120*): alors la perpendiculaire DP , se confond avec l'axe DE , aussi la ligne DQ doit être prise sur l'axe DE lui-même prolongé autant qu'il est nécessaire, le

rayon GF dont on s'est servi dans les figures 117 & 118 devient égal à la somme ou à la différence des mêmes demi-axes. Il est encore visible que les points G doivent être pris dans les figures 119 & 120, sur la ligne CQ , & que le lieu de tous ces points est égal à la ligne CQ elle-même.

OBSERVATION II.

455. Tout ce que nous venons de voir a rapport à la dernière solution : si l'on vouloit dans le cas où les diamètres sont les axes de l'ellipse, comme on le suppose, trouver le point O qui ne peut être déterminé comme dans les figures précédentes, voici ce qu'il faudroit faire. Après avoir marqué sur un rayon quelconque GF point S tel que $GS = DQ$ ou AC , on menera par ce point les lignes SO parallèles à AB & SR parallèle à CD , & de cette manière le point O sera celui qui répond au point O déterminé comme on a vu dans les figures 117 & 118. Cette construction supposée, il est aisé de démontrer directement & indépendamment de la solution générale que le point S est un des points de l'ellipse dont AB & DE sont les axes : car à cause du triangle rectangle GSO , on a $GO^2 = GS^2 - SO^2 = CA^2 - CR^2$, puisque, par construction, $GS = CA$, & que $SO = CR$: donc $GO^2 = AR \times CR$, par le Lemme fondamental, donc on aura à cause des triangles rectangles sem-

blables RSF , OGS , $RS^2 : GO^2$ ou $AR \times RB$
 $:: FS^2$ ou $CD^2 : GS^2$ ou CA^2 . C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

456. Il suit de la dernière solution générale que si dans un angle quelconque FCQ (fig. 117 & 118) on fait mouvoir une droite constante GF de manière que ses deux extrémités touchent continuellement les deux côtés de cet angle, & qu'il y ait sur cette droite prolongée, (comme dans la figure 117) ou non (comme dans la figure 118) un point S tel que les parties GS , GF soient inégales, ce point S décrira une ellipse dont les lignes GS & DC seront les demi-diamètres conjugués, tandis que la règle GF parcourra les quatre angles qui sont autour du point C , de manière que ses extrémités G , F soient toujours sur les côtés des mêmes angles.

COROLLAIRE II.

457. Si l'on suppose le point S au milieu de GF , & de plus l'angle dans lequel se fait le mouvement de 90 degrés, la courbe décrite dans ce mouvement sera un cercle, puisque les deux demi-diamètres conjugués seront égaux, & que l'angle des ordonnées est droit. Ainsi l'on pourroit se servir de cette méthode pour décrire un cercle dont le rayon seroit trop grand pour être décrit avec le compas ordinaire. Si l'angle est aigu, dans la même

supposition, la courbe ne peut toujours être qu'une ellipse.

Construction d'un Compas elliptique universel.

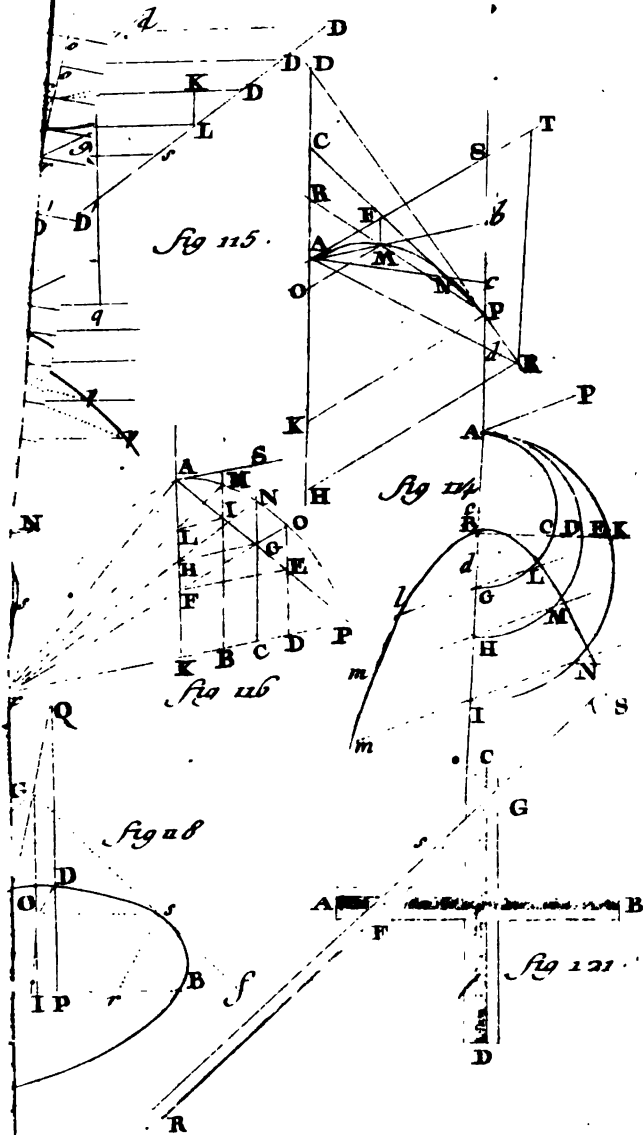
458. On déduit de cette solution une construction très-simple & très-facile d'un compas elliptique que l'on peut appeller universel, parcequ'il peut servir à décrire toutes sortes d'ellipse, par un mouvement continu. Comme cette machine est la plus parfaite de celles qui ont été imaginées en ce genre, nous en donnerons une explication plus détaillée que des autres dont nous aurons à traiter par la suite.

AB & *CD* (fig. 121) sont deux regles de laiton jointes ensemble & d'équerre l'une à l'autre. On a pratiqué dans chacune une petite reinure plus large vers le bas que vers le haut & qui peut avoir environ le tiers de la largeur de la regle vers le haut. Dans chacune de ces coulisses on insere une petite pièce de cuivre mobile dans toute la longueur de cette coulisse. Cette petite pièce porte sur son milieu un petit axe parfaitement rond & poli, destiné à passer dans un trou de même diamètre pratiqué dans une regle d'acier comme *RS*. On fixe la regle par le moyen de ces deux petits axes, & pour empêcher qu'elle ne se dérange dans le mouvement, on l'arrête par une petite goupille qui traverse les deux axes. Cette regle d'acier porte à son extrémité un

petit stile, où l'on peut adapter une plume ou un crayon, & à l'autre extrémité R , on peut y pratiquer un petit bouton qui puisse servir à faire mouvoir plus commodément cette même regle. Cela posé, si l'on pousse la regle RS de R vers B , la petite pièce F mobile dans la reinure CD , ne peut obéir à ce mouvement qu'en avançant de C vers D , & par le même moyen fait monter la seconde G dans la coulisse BA de B vers A . De cette manière lorsque chaque pièce a parcouru dans sa regle à droite & à gauche du centre de la croix une ligne égale à FG , le point S a décrit une ellipse dont GS & FS sont les deux demi-axes, car il est évident que cette regle a toujours eu ses deux points F , G dans les côtés de l'angle droit.

Il est aisé de reconnoître que la petite pièce mobile G ne peut pas monter plus haut dans la coulisse AB que d'une quantité égale à FG , c'est - pourquoi l'on se contente dans la construction de cette machine de faire les regles AB ou CD chacune un peu plus que double de FG . Il faut pour que la machine soit exacte que les trois points F , G , S , c'est - à - dire, les deux pivots & le point décrivant soient dans une même ligne droite. Sans cela la coube décrite ne seroit pas décrite sur les axes qui sont les lignes les plus faciles à déterminer. Si l'on veut se servir de cette machine pour décrire toutes sortes d'ellipses, il faut que le

porte



crayon S puisse s'approcher ou s'éloigner des points F , G ; car il est visible par tout ce qu'on a démontré jusqu'ici, que les ellipses varient dans le rapport de leurs axes. Mais si l'on veut décrire des ellipses semblables par le moyen de la même machine, il faut aussi que l'un des points F , G soit mobile, c'est-à-dire qu'on puisse augmenter ou diminuer la distance FG dans quel rapport on voudra. Car lorsqu'il n'y a que le point S de mobile, on ne peut qu'augmenter ou diminuer le grand axe, sans toucher au petit; au lieu que pour décrire une ellipse semblable, il faut allonger ou raccourcir chaque demi-axe dans la même proportion. On a eu égard à tout cela dans la construction du compas elliptique tel qu'il se trouve chez les ingénieurs pour les instruments de mathématiques.

459. Si le point S étoit entre les points G , F comme en s , il est visible que dans le mouvement de la règle FG , ce point décriroit une ellipse: mais cette machine n'a pas les mêmes avantages que la précédente, & l'on ne peut décrire avec elle que des portions d'ellipse, parceque le stile s se trouveroit empêché dans son mouvement à la rencontre des branches de la croix.

COROLLAIRE. III.

460. Puisque la ligne GF est une ligne constante (*fig. 122 & 123*) & que d'ailleurs elle

Y

se meut dans un angle constant, on peut la regarder comme la corde de l'angle dans lequel elle se meut. De plus, comme dans un cercle quelconque la corde qui soutient le petit segment est la même que celle du grand; dans toutes les positions de la ligne GF , dans l'angle DCA , ou dans son supplément DCB , le cercle qui passera par les trois points G , C , F sera toujours le même. Il suit encore de - là que le centre du même cercle sera toujours à égale distance du centre C , & par conséquent décrira un cercle autour du centre de l'ellipse; tandis que le point S décrira l'ellipse dont AB & DE sont les diamètres conjugués.

N. B. Ce Corollaire est de la dernière importance, pour bien comprendre tout ce que nous dirons dans la suite de ce livre, sur la description des ellipses dont on a les axes ou les diamètres conjugués: c'est - pourquoi il faut le relire, jusqu'à ce qu'on le conçoive parfaitement.

C O R O L L A I R E IV.

461. Il suit du dernier corollaire, que l'on peut aisément supprimer un des côtés de l'angle dans lequel on fait mouvoir la règle qui porte le point décrivant; (*fig. 122 & 123*) pourvu que l'on substitue une autre ligne qui soutienne cette ligne constante GF , de la même manière qu'elle étoit soutenue par la droite supprimée. Pour cela, imaginons que l'on ait trouvé le centre O ou o du cercle qui passe par les trois

points G, C, F ou G, C, f & que de ce centre on ait mené aux mêmes points & au point S les droites OG, OC, OF, OS ; cela posé, puisque le rayon CO est une ligne constante, comme on l'a démontré dans l'article précédent, & que d'ailleurs, par hypothèse, la ligne GF est aussi une ligne constante; le triangle GOF sera toujours le même, & son sommet O sera toujours dans la circonférence décrite par le rayon CO , tandis que l'angle F de sa base parcourera la ligne FCA ; ainsi on pourroit supprimer la ligne CD , & décrire l'ellipse par le moyen du triangle GOF , comme on la décriroit auparavant par le moyen des lignes AB, CD , puisque la ligne FGS se trouve toujours dans le même mouvement. Par la même raison, on peut se servir du triangle FOS en gardant toujours la ligne AB , & supprimant la ligne DC : mais si l'on vouloit se servir du triangle GOS qui maintient toujours le point O dans la circonférence décrite par le rayon CO , il est évident que dans ce cas il faut supprimer la ligne CB & se servir de la ligne CD , puisqu'alors le triangle GOF devenant inutile, son angle F n'a plus besoin de ligne pour se soutenir, & que d'ailleurs si on le laisse subsister, la ligne GF sera toujours mue de la même manière, par le moyen des lignes constantes GO, GS, OS qui forment toujours le même triangle, & des lignes CD & CO .

conjugués sont donnés de grandeur & de position.

P R O B L È M E.

463. Deux lignes droites AB , DE (fig. 124 125 & 126) étant données de grandeur & de position pour deux diamètres conjugus d'une ellipse, construire une machine par le moyen de laquelle on puisse décrire l'ellipse demandée d'un mouvement continu.

S O L U T I O N.

Soient AB , DE les diamètres donnés qui se coupent mutuellement en deux parties égales au centre C , sur lesquels il faut décrire une ellipse. Par le point D extrémité de l'un de ces diamètres, on abaissera sur son conjugus AB la perpendiculaire DF , sur laquelle prolongée, s'il est nécessaire, de part & d'autre du point D à commencer du même point, on prendra une ligne DG égale à la moitié du diamètre AB . Par le point G & le centre C , on menera une droite CG que l'on divisera en deux parties égales au point O duquel on menera au centre C & aux points D , F les lignes OC , OF , OD . Cela fait, on préparera d'une matière solide, comme de laiton ou autre chose semblable ; 1° une règle CO percée de deux trous l'un en C & l'autre en O ; 2° un triangle FOD percé de trois trous à chacun de ses angles D , O , F que l'on arondira comme ils sont marqués dans la figure, pour une plus facile

exécution de la machine. Le point C de la règle CO sera fixé à un point C d'une règle IL de quelle longueur on voudra, par le moyen d'une charnière, en sorte que cette même règle CO puisse tourner autour du point C comme centre; cette même règle sera aussi attachée par son extrémité O avec le sommet O du triangle DOF par le moyen d'une semblable charnière; au point F de ce triangle on mettra une petite pointe qui servira à faire mouvoir le point F de C vers F , ou de F vers C , de manière qu'il soit toujours appliqué sur le côté AB de la règle IL , que l'on suppose elle-même dirigée suivant l'un des diamètres AB . Si l'on met un crayon au point D , il est visible par tout ce qui précède, que le point D de la ligne FG décrira une ellipse sur les diamètres donnés de position; car le point O est le rayon du cercle qui passe par les trois points G , F , C dans toutes les situations possibles de la droite FG entre les droites CG , CB .

COROLLAIRE I.

464. Il suit de cette solution que la ligne FG qui se meut entre le diamètre CB & la ligne CG , est toujours égale à la somme ou à la différence de deux lignes, dont une est égale à la perpendiculaire abaissée d'un demi-diamètre CD sur son conjugué, & la seconde est égale au demi-diamètre sur lequel la première ligne a été abaissée. Dans la figure 125 la ligne FG

est égale à la somme de ces lignes & dans les figures 124 & 126, c'est la différence des mêmes lignes.

COROLLAIRE II.

465. Si les diametres donnés sont à angles droits, ou, ce qui est la même chose, si ce sont les axes mêmes de l'ellipse; la ligne *FG* sera égale à la somme ou à la différence des mêmes demi-axes. Le point *F* tombera au point *C* (fig. 127 & 128) & la ligne *CG* se trouvera sur le second axe *CD* prolongé de part & d'autre, du point *C*, s'il est nécessaire; & enfin le point *O* fera sur le milieu de la ligne *CG*, c'est-à-dire que l'on aura le rayon du cercle qui passe par les points *F*, *C*, *g* dans toutes les situations possibles de la ligne *Fg* en prenant la demi-somme ou la demi-différence des axes proposés; de plus, le centre de ce cercle se trouveroit toujours sur la ligne *Fg* à cause de l'angle droit; comme nous l'avons déjà fait remarquer ailleurs.

On déduit encore des deux derniers corollaires, de nouvelles machines qui peuvent être très-utiles pour la description d'une ellipse dont on connoit les deux axes. Nous allons les expliquer dans les articles suivants.

Description d'un nouveau Compas elliptique.

466. II. est une regle de cuivre, ou de quelque autre matiere bien polie (fig. 127 & 128)

à laquelle on a joint deux regles CO , OF de même matiere, unies ensembles par le moyen d'une charniere en O ; la premiere peut tourner autour du point C de la regle IL à laquelle elle est unie, comme autour d'un centre de mouvement; la seconde est continuellement appliquée à la même regle IL par son extrémité F , qui peut parcourir les parties CF , CA de la ligne AB , jusqu'à ce que ces deux regles soient toutes entieres appliquées à la regle IL . Sur la regle OF , que nous appellerons la *mobile*, est un stile S qui doit servir à décrire l'ellipse, & que l'on peut placer de maniere qu'il soit mobile sur la même regle, afin que l'on puisse décrire plusieurs ellipses avec le même instrument. Il est aisé de reconnoître que l'on pourroit prendre le point S en s , sur le prolongement de la ligne OF . Dans le cas où le stile est placé en S (fig. 127) les demi-axes de l'ellipse décrite seront $CO + OS$ pour le grand, & SF pour le petit: & dans le cas où le point décrivant est placé en s , le demi-grand-axe est égal à Fs , & le demi-petit-axe est égal à $CO - Os$. Ainsi l'ellipse décrite par le point S sera ADB , & celle qui est décrite par le point s est la courbe adb .

S C H O L I E.

457. Il faut remarquer que des deux machines que nous venons d'expliquer pour construire des ellipses dont les axes sont donnés, celle qui est représentée par la fig. 128 est la plus facile à mettre en exécution, parce que la somme des lignes CO , OF étant moindre que celle des li-

gnes $CO + OS$, il n'est pas nécessaire de faire la règle CL plus longue que le double de CO : ainsi le point S pourra décrire l'ellipse toute entière sans être arrêté dans son mouvement; au lieu que dans la figure 127 le point S ne peut décrire l'ellipse toute entière, parce que les lignes $CO + OF$ étant plus longues que les lignes $CO + OS$, il doit nécessairement s'arrêter à la rencontre de la règle IL .

On déduit des deux machines que nous venons d'expliquer des descriptions nouvelles, & très-simples d'une ellipse dont les deux axes sont donnés; en cherchant un grand nombre de points de cette courbe. Cette description peut être d'autant plus commode, que sans beaucoup de temps on pourra trouver un si grand nombre de points que l'on voudra.

468. Soient CA , CB les deux demi-axes d'une ellipse qu'il faut décrire par plusieurs points (fig. 129 & 130).

Ayant décrit sur l'un des demi-axes, sur CA , par exemple, un quart de cercle AM qui coupe l'autre axe prolongé, s'il est nécessaire, au point E ; par tant de points que l'on voudra du même axe CA , on élèvera des ordonnées PM, PM, PM prolongées, indéfiniment (fig. 130) dans le cas où le cercle a été décrit sur le petit axe CA ; ayant ensuite divisé la ligne BE différence des deux demi-axes en deux également au point D , & tiré du centre C aux extrémités des ordonnées PM les droites CM, CM, CM que l'on prolongera aussi indéfiniment (dans

La fig. 130) sur les lignes CM à partir du point M avec le rayon constant BD , on décrira des arcs de cercle du centre O qui couperont les PM aux points S . S , S qui seront des points de l'ellipse demandée.

DÉMONSTRATION.

Pour se convaincre que le point S est à l'ellipse, par le point O & le point S soit menée la ligne OSF , ou SOF (fig. 130) jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe CA prolongé s'il est nécessaire. Il est visible par cette construction, que le triangle COF est isocèle, car dans le triangle rectangle CPM l'angle C = un droit — $CM P$, & au triangle rectangle FSP , l'angle en F = un droit — FSP , mais l'angle FSP = $CM P$, puisque cet angle est opposé au sommet de l'angle OSM du triangle isocèle MOS ; donc cette construction revient entièrement à la machine désignée par la figure 127, puisque les lignes CO , OF sont égales, & que la ligne OS est égale à la moitié de la différence des demi-axes proposés.

Pour faire encore mieux sentir la vérité de tous les articles précédents qui ne sont que des suites immédiates de l'article 451, & pour convaincre ceux qui ne sont pas accoutumés à se figurer tous les mouvements dont il s'agit ici; nous allons donner une démonstration directe de cette construction.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Par un un des points S soit menée la droite SR parallèle à l'axe CA (fig. 129 & 130) jusqu'à ce qu'elle rencontre le rayon CM qui passe par l'extrémité M de l'ordonnée PM sur laquelle on a déterminé le point S . Le triangle OSR sera isocèle & semblable au triangle COF , puisque l'on a démontré ci-dessus l'égalité des angles en C & en F ; donc $OR=OS=OM$; & partant $RM=BE$; cela posé, après avoir encore mené la droite RK parallèle à PM & terminée à l'axe en K , on aura à cause des triangles semblables CKR , CPM ; $PM:KR$ ou $PS::CM:CR$ ou $CA:CB$; donc le point S est à l'ellipse, puisque l'on démontrera de la même manière que toutes les ordonnées PS sont aux ordonnées circulaires correspondantes dans le rapport de CA à CB . C. Q. F. D.

Si simple que soit cette description, elle deviendrait impraticable. lorsque le rayon BD ou MO égal à la demi-différence des demi-axes sera très-petit, parce que dans ce cas il seroit difficile de déterminer les points de l'ellipse avec précision; c'est pourquoi, il est à propos d'avoir recours à une autre méthode, en se servant de la moitié de la somme des demi-axes donnés, ce qui fera un rayon toujours assez grand, pour décrire l'ellipse avec toute l'exactitude possible.

AUTRE DESCRIPTION.

469. Sur l'un des demi-axes CA , par exemple,

on décrira un quart de cercle AME qui rencontrera l'autre axe CB prolongé en E (fig. 131 & 132). Il est évident que la ligne BE est égale à la somme des demi-axes : on partagera cette ligne en deux également au point D ; ayant ensuite mené à l'axe CA , sur lequel on a décrit le quart de cercle des ordonnées PM , PM , PM prolongées indéfiniment au-dessus de CA (fig. 131) & au-dessous de la même ligne (fig. 132), & tiré par le centre C les lignes CM , CM , CM aussi prolongées s'il est nécessaire; sur chacune de ces lignes du point O comme centre avec un rayon $OM=BD$, on décrira des arcs de cercle qui couperont les ordonnées prolongées en S , & donneront sur chacune de ces lignes un point de l'ellipse demandée. Cette description suit entièrement des mêmes principes que la précédente, je laisse aux commençants le plaisir d'en trouver eux-mêmes la démonstration.

P R O B L È M E.

470. Deux diamètres conjugués AB , DE étant donnés (fig. 133) décrire l'ellipse à laquelle ils appartiennent en se servant du cercle.

SOLUTION.

On décrira sur l'un des diamètres AB un demi-cercle AFB , & ayant joint les extrémités des deux demi-diamètres CA , CD par la

ligne AD ; par un point P quelconque du diamètre AB on menera la droite PM perpendiculaire à ce diamètre terminée à la circonférence en M , & la droite PO parallèle à la ligne AD terminée en O à la ligne CD . Par le point O ainsi déterminé, on prendra de part & d'autre sur une ligne SO parallèle à AB les parties OS , O_s égales à l'ordonnée PM ; ce qui donnera deux points S , s de l'ellipse demandée.

DÉMONSTRATION.

A cause des parallèles AD , PO les triangles ACD , PCO sont semblables & donnent $CA^2 : CP^2 :: CD^2 : CO^2$, donc *dividendo* $CA^2 - CP^2 : CA^2 :: CD^2 - CO^2 : CD^2$ & *alternando* $CA^2 - CP^2 : CD^2 - CO^2 :: CA^2 : CD^2$. Mais $CA^2 - CP^2 = AP \times PB = PM^2 = OS^2$, & par la même raison $CD^2 - CO^2 = EO \times OD$; donc $OS^2 : EO \times OD :: CA^2 : CD^2$, d'où il suit que ce point est à l'ellipse dont AB , DE sont les diamètres conjugués. C. Q. F. D.

COROLLAIRE

471. Si les deux diamètres conjugués sont égaux, les triangles ACD & PCO seront isocèles, & les lignes CP , CO seront égales; dans ce cas, pour avoir les points de l'ellipse, il suffira de mener par le point P une droite $PQ = PM$ & parallèle au diamètre CD . On trouveroit tous les autres points de la même manière.

SOLUTION

du Problème proposé (num. 444) pour l'Hyperbole.

PROBLÈME I.

472. Deux lignes droites AB , DE qui se coupent en deux parties égales au point C étant données de grandeur & de position pour deux diamètres conjugués d'une hyperbole (fig. 134), la décrire par plusieurs points.

SOLUTION.

A l'extrémité A de l'un des diamètres conjugués, on mènera une droite indéfinie GA parallèle à l'autre DE , sur laquelle on prendra les parties GA , AF chacune égale à la ligne DC . Par le centre C & les points A , F on mènera les droites CF , CG qui seront les asymptotes de l'hyperbole demandée, dont le point A est un de ses points.

Par le même point on mènera une droite quelconque HAK terminée aux asymptotes, & l'on prendra $HI=AK$, ce qui nous donnera un nouveau point de l'hyperbole, par le moyen duquel on trouveroit encore tant d'autres points que l'on voudroit en tirant des droites LIM , OIQ sur lesquelles on prendra les droites PQ , OI ; MN , IL égales entr'elles. On décrira de la même manière l'hyperbole opposée à celle-ci & les conjuguées aux deux premières si on en avoit besoin, toute cette description suit évidemment des propriétés des asymptotes de

montrées *art.* 290 & suivants. C. Q. F. T. & D.

Il est aisé de reconnoître qu'on pourroit se servir de la même méthode, si l'on avoit seulement les asymptotes données de position avec un point de la courbe; car le point donné supplée à la connoissance des diametres de l'hyperbole & détermine les quatres hyperboles conjuguées, en sorte que dans le même angle des asymptotes, on ne peut pas décrire plusieurs hyperboles qui passent par le même point.

P R O B L E M E. II.

473. *Les mêmes choses étant données, décrire l'hyperbole par un mouvement continu* (fig. 135 & 136).

S O L U T I O N.

Ayant déterminé l'angle des asymptotes; comme dans le problème précédent, on fera une fausse équerre dont l'angle Pef soit égal à l'angle GCF des asymptotes, & dont la branche ef soit égale à la partie CF de la même asymptote comprise entre le centre C & une ligne AF menée de l'extrémité A du diametre AB parallelement à l'autre asymptote CG . Au point f on attachera une regle Af mobile autour de ce point, & d'une longueur indéfinie. Cela posé, si l'on imagine que cette fausse équerre toujours appliquée sur l'une des asymptotes CFf , se meuve de e vers C & que la regle qui lui est attachée passe toujours par le point fixe A auquel on aura fixé une pointe ou stilet pour maintenir la regle Af , l'intersection P de la regle & de l'équerre dans ce mouvement continu, décrira l'hyperbole

L'hyperbole CA est le demi-diamètre, & dont les lignes CF , CG sont les asymptotes.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'angle Pcf de la fausse équerre est égal à l'angle GCF des asymptotes, il sera aussi égal à l'angle Afc formé par une des asymptotes CF & par une ligne AF parallèle à l'autre CG ; ainsi les triangles Aff , Pcf seront semblables & donneront $cf:cP :: fF:AF$; donc $cP \times fF = cf \times AF$. Mais $cf = CF$, par construction, donc $Ff = Cc$, en ôtant de fF la ligne cf & ajoutant au reste son égale CF : donc $cP \times Cc = CF \times AF$, d'où il suit que le point P est à l'hyperbole, puisque le rectangle $cP \times Cc$ est égal à la puissance ou au rectangle $CF \times AF$ qui est toujours le même. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

474. Il est aisé de voir que la démonstration ne change pas, en supposant la branche cP de la fausse équerre entre la ligne AF & l'asymptote CG (fig. 136). On peut aussi par le moyen de la même figure se convaincre que le point P s'approche continuellement de la ligne CG , sans jamais pouvoir être sur cette ligne; car lorsque le point f sera sur le point F , le point c sera sur le point C , & alors la branche cP de la fausse équerre, sera parallèle à la règle fP ; Ainsi l'on ne pourra plus marquer de point P par l'intersection de ces deux règles.

475. Si par le point B extrémité du diamètre AB , on mene la ligne BF terminée à l'asymptote CF & parallèle à l'autre CG (fig. 137 & 138); on pourra construire une machine à peu près semblable à la précédente, en faisant la branche cf d'une nouvelle équerre égale à la ligne CF , & disposant la règle Bf mobile autour du point f & attachée à notre équerre, de manière qu'elle soit toujours appliquée au point B , tandis que la ligne cf parcourra la ligne $FfCc$. Dans cette nouvelle construction, les triangles BFf , Pcf seront toujours semblables, & donneront Ff ou $Cc : FB :: fc$ ou $CF : cP$ ou CG , donc $CG \times Cc = FB \times CF$; d'où il suit évidemment que le point P est à l'hyperbole, puisque le rectangle $FB \times CF$ est la puissance de la même courbe.

PROBLEME III.

476. Deux lignes droites égales CA & CB (fig. 139) étant données de position pour deux demi-diamètres conjugués d'une hyperbole équilatère; décrire cette courbe par plusieurs points, sans avoir recours aux asymptotes.

SOLUTION.

Par tant de points O , O que l'on voudra du diamètre BC prolongé autant qu'il sera nécessaire, on menera des lignes indéterminées OP , OP &c. toutes parallèles entr'elles & au diamètre CA ; au point C centre des hyperboles opposées, on élèvera la droite CD indéfinie

& perpendiculaire au diamètre CA , sur laquelle on prendra les parties Co , Co égales aux lignes CO , CO chacune à sa correspondante. De chaque point o au point A extrémité du diamètre CA on mènera les droites oA , oA : ensuite on prendra sur chaque OP parallèle à CA une partie déterminée OP égale à la ligne oA ; chacune toujours égale à sa correspondante. Tous les points P trouvés de la même manière seront à l'hyperbole équilatère dont CA & CB sont les demi-diamètres conjugués. Car à cause du triangle rectangle ACo on a évidemment $Ao^2 = CA^2 + Co^2$, ou, en mettant à la place des lignes Ao & Co leurs égales PO , CO , par construction, $PO^2 = CA^2 + CO^2$, qui est la propriété des ordonnées extérieures de l'hyperbole équilatère (art. 327). G. Q. F. D.

COROLLAIRE

477. Si les diamètres donnés font angle droit, ou, ce qui revient au même, si on a l'axe d'une hyperbole équilatère, la construction précédente peut toujours avoir lieu & devient une des plus simples par la suppression des arcs de cercle Oo , Oo ; puisque dans ce cas les ordonnées sont perpendiculaires à l'axe.

PROBLÈME.

478. L'axe & les foyers d'une hyperbole ou d'une ellipse étant donnés; construire une machine propre à décrire ces deux courbes d'un mouvement

continu, en servant des propriétés des foyers (fig. 140 & 141).

SOLUTION POUR L'ELLIPSE.

Soit Aa l'axe de l'ellipse demandée dont F, f sont les foyers. On prendra trois regles Df , BF & DB , dont les deux premières Df , BF feront chacune égale à la grandeur de l'axe Aa , & percée d'un bout à l'autre d'une reinure de même largeur dans l'une & dans l'autre : ces deux regles seront fixées par une de leurs extrémités aux foyers F, f par le moyen d'un stile autour du quel elles pourront tourner. Par l'autre extrémité elles seront pareillement fixées au moyen d'un stile semblable au précédent, avec la troisième regle BD que l'on fera de la grandeur de la distance Ff des foyers. Il est aisé de voir que les trois regles ainsi disposées pourront avoir une infinité de situations différentes. Si l'on met au point P intersection des deux regles égales un stile qui passe dans la reinure qui a été pratiquée à cet effet ; je dis que ce point P décrira l'ellipse demandée pendant le mouvement des regles autour des foyers.

Imaginons qu'elles ont actuellement la situation représentée par la figure, & que l'on ait tiré la ligne DF ; les triangles BDF , fFD seront égaux en tout, puisque les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre ; car, par construction $Df = BF$ & $BD = Ff$, de

plus ils ont une base commune DF : donc en ôtant le triangle commun DPF , puisqu'ils ont, outre la base commune les triangles DPB , FPf sont aussi égaux en tout ; ainsi l'on aura $FP=DP$: donc $FP+fP=Df$ ou Aa , d'où il suit évidemment que la courbe décrite est une ellipse.

SOLUTION POUR L'HYPERBOLE.

479. Cette solution revient à peu près au même que la précédente. On prendra deux règles fDP , BFP chacune égales entr'elles & d'une longueur indéfinie. Sur l'une & l'autre on fera deux trous f , D ; B , F chacun distant l'un de l'autre de la longueur de l'axe Aa ; le reste de la règle sera percé dans toute sa longueur d'une rainure de même largeur partout, dans laquelle on puisse faire glisser un stile P de même diamètre. chacune de ces règles sera fixée aux foyers F , f par le moyen d'un clou autour duquel elle pourra tourner & elles seront assujeties l'une à l'autre par une troisième règle BD qui sera de la longueur de la ligne Ff distance des foyers de l'hyperbole, & qui leur sera jointe par des petites goupilles qui passeront par des trous pratiqués en B & en D sur chacunes. Si l'on imagine que l'on fasse mouvoir ces règles ainsi assemblées, le stile P placé, comme nous l'avons dit, dans l'intersection commune des rainures, décrira dans ce mouvement l'hyperbole demandée.

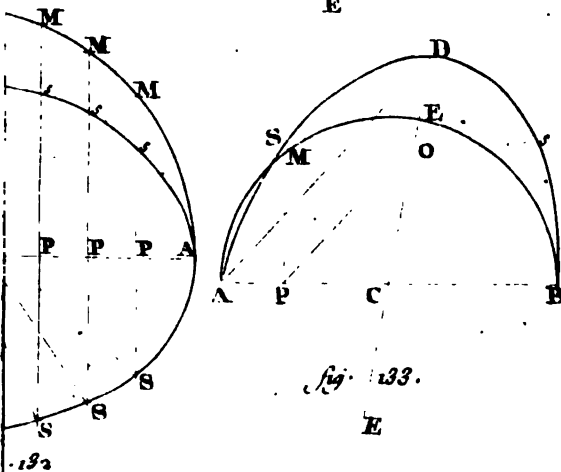
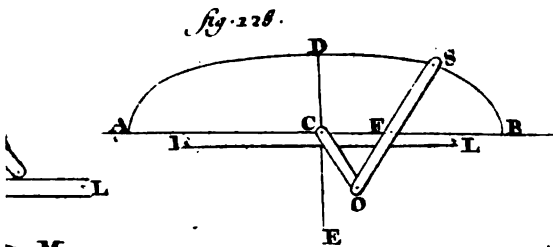
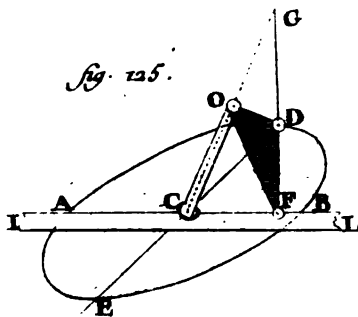
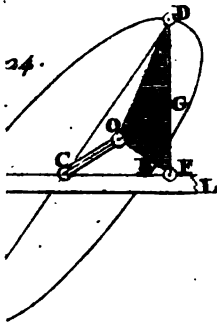
Pour s'en convaincre, soit tirée la ligne FD ; les triangles BFD , fDF seront égaux en tout, puisque, outre la base commune DF , ils ont

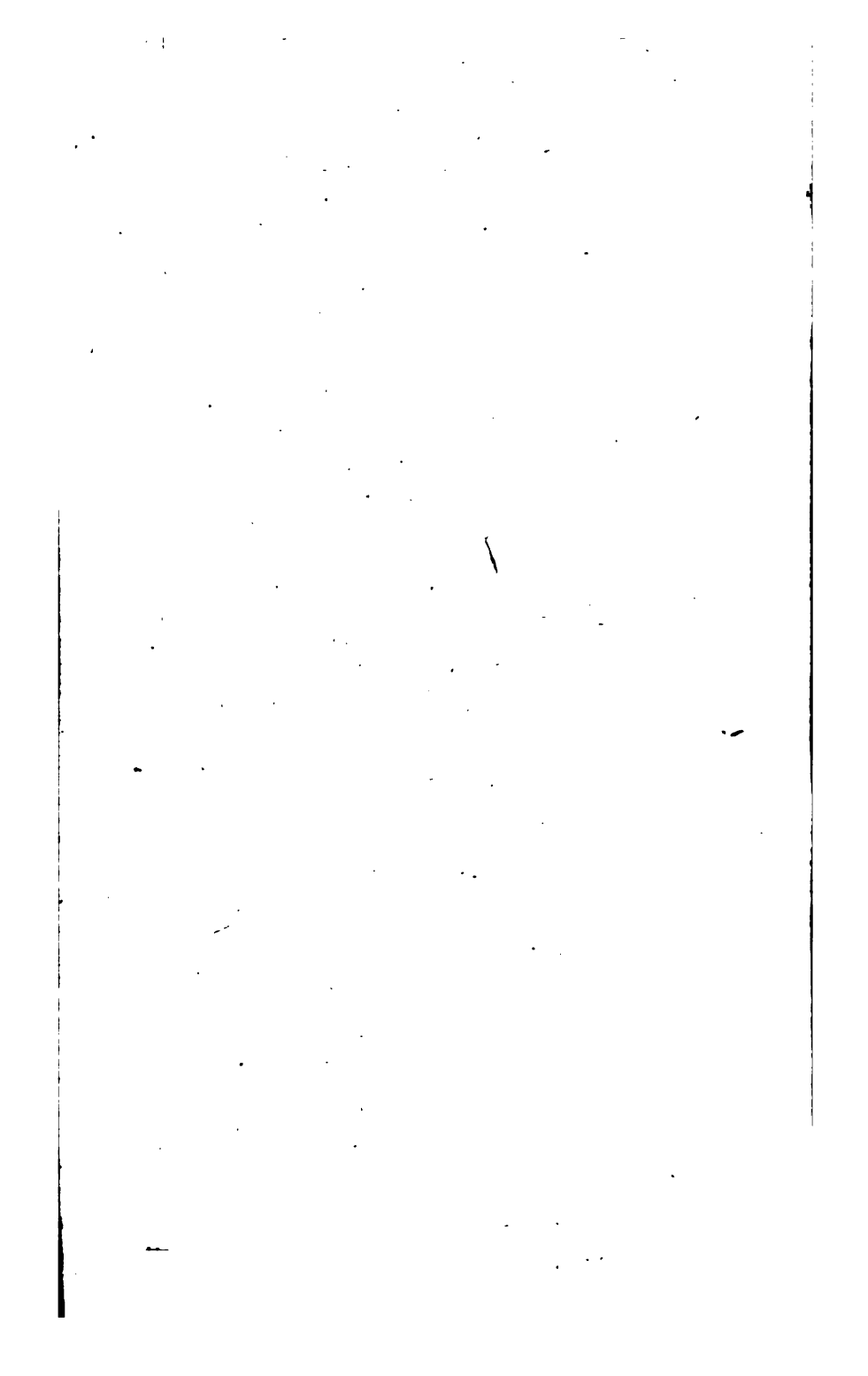
les côtés BF , BD égaux aux côtés fD , fP ; donc le triangle DPF est isocèle, & l'on aura $FP = PD$: donc $fP - Pf = FD$ ou As , ce qui montre évidemment que la courbe est une hyperbole, puisque cette propriété est la principale des foyers. C. Q. F. D.

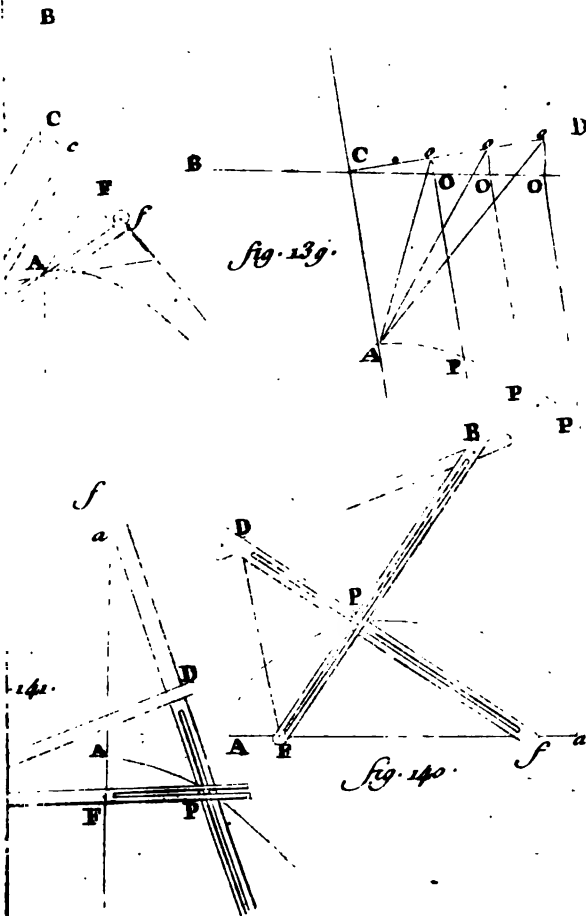
Il y auroit encore une infinité de choses curieuses à expliquer sur la description des Sections coniques, & qui ne pourroient manquer d'exercer beaucoup l'esprit de ceux qui voudroient s'y appliquer. Si l'on veut en voir d'avantage, on pourra recourir au grand traité des Sections coniques du P. GRÉGOIRE DE S. VINCENT. On y trouvera la solution d'un des plus beaux Problèmes que l'on puisse proposer sur les Sections coniques, & que l'on pourroit appeller la *Description réciproque* des Sections coniques, c'est-à-dire, l'art de de décrire une Section conique quelconque déterminée de grandeur, par le moyen d'une autre donnée aussi de grandeur & de position ; comme si on proposoit de décrire une ellipse ou une hyperbole, par le moyen d'une parabole donnée, & réciproquement.

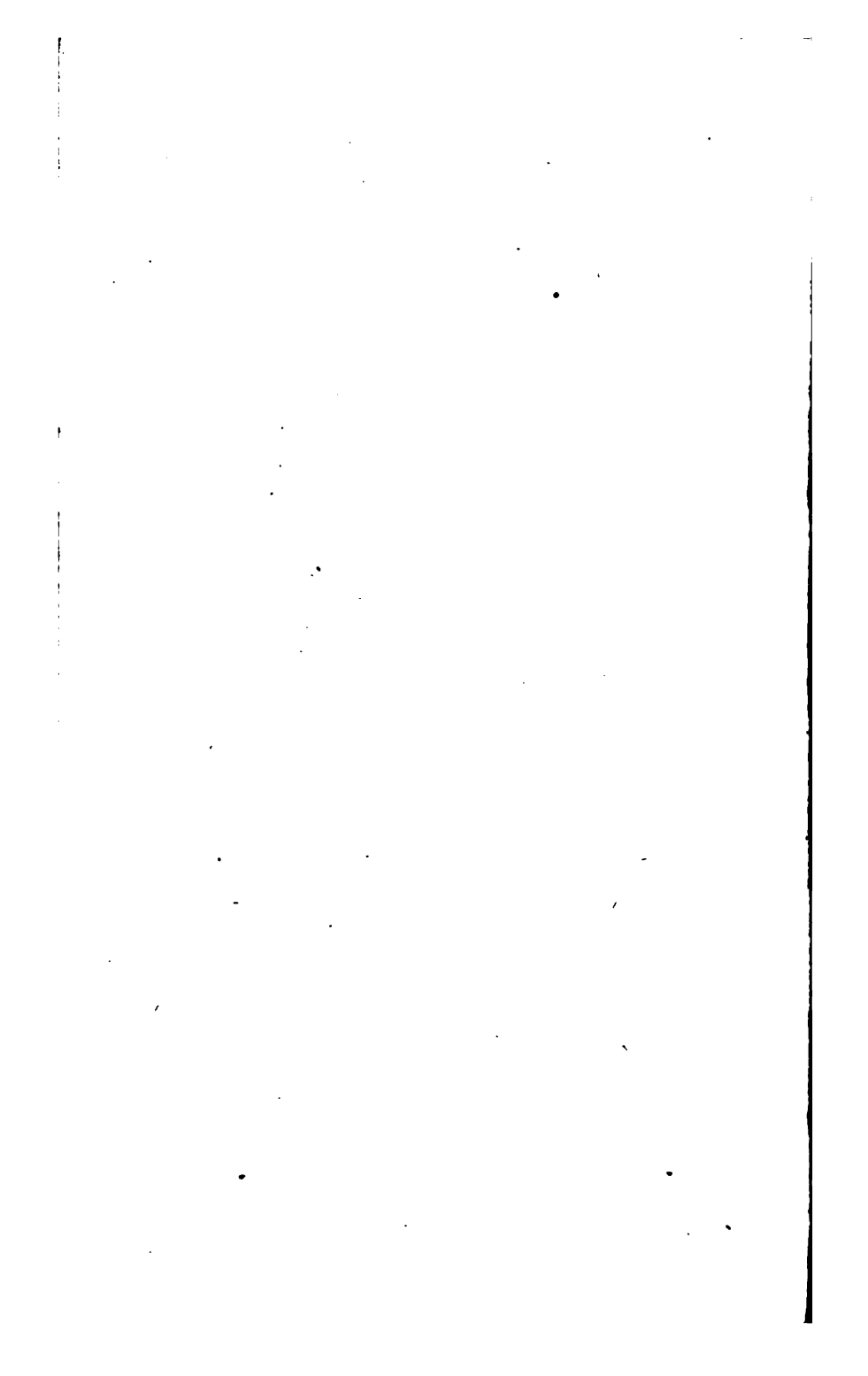
Ceux qui auront bien compris ce qui précède & qui joindront à cela une connoissance suffisante de l'application de l'algebre à la géométrie, pourront aisément trouver les solutions analytiques de ce problème.

Fin du quatrième Livre & de la Description
des Sections coniques.











· A V E R T I S S E M E N T .



E qui suit n'est, pour ainsi dire, qu'une traduction littérale du quatrième livre des Sections coniques du P. DESCHALLES.

Je ne crois pas que l'on ait, en fait d'éléments synthétiques, quelque chose de plus clair que ce qui a été fait sur cette matière par ce sçavant Géometre. Il a débrouillé dans cet ouvrage le cahos des coniques d'Appollonius, & renfermé dans un petit nombre de propositions sur chaque courbe, ce qu'il est absolument nécessaire de sçavoir dans cette partie, lorsqu'on ne veut pas aller plus loin. On sera peut-être surpris que j'emploie, ou plutôt que l'auteur que j'ai traduit, ait établi sept ou huit théorèmes pour démontrer des propositions qui se trouvent démontrées dans d'autres livres par un seul; mais je prie les lecteurs de faire attention, qu'en fait de Géométrie, lorsqu'on suppose quelque chose qui a besoin d'être prouvé, la démonstration la plus abrégée par cette méthode est la moins complète; j'ai substitué dans cette traduction, comme dans tout ce que l'on a vu jusqu'ici, les signes $+$ & $-$ à des expressions verbales, afin d'augmenter la précision du tableau géométrique; & par-là je diminue sou-

AVERTISSEMENT.

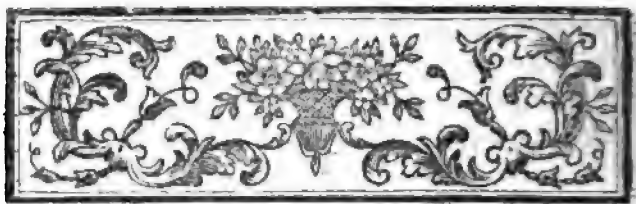
vent la longueur des démonstrations , en évitant de répéter deux fois la même proportion , & disposant les rapports dont elles sont composées de manière qu'on puisse toujours conclure du premier au dernier , ce qui ne se trouve pas si commodément dans le texte latin.

J'ai inséré , dans les endroits où j'ai cru convenable , des propositions intéressantes & qui peuvent être nécessaires pour la solution des problèmes qu'on pourroit proposer sur cette matière ; comme ceux qui auroient pour objet de couper une section conique déterminée dans un cône donné. Je donne ensuite un traité de la solidité des corps dont les éléments croissent dans la raison des quarrés des ordonnées à un diamètre d'une section conique. Je démontre comment il faut s'y prendre pour toiser les segments & les secteurs de ces mêmes corps. Quoique je ne veuille point blâmer la méthode dont tous les autres auteurs se sont servi pour démontrer la solidité de l'ellipsoïde ; je crois que l'on pourra trouver quelque chose de nouveau dans la mienne , en ce qu'elle ne suppose point comme les autres la cubature de la sphère qui est elle-même une espèce particulière d'ellipsoïde , & qu'aucontraire la solidité de la sphère & de toutes ses parties se conclad immédiatement de celle que je donne pour l'ellipsoïde : elle a encore cet avantage qu'elle fait voir de quelle manière l'ellipse & l'hyperbole affectent les mêmes propriétés jusque dans les solides qui tirent leur génération de ces courbes. Après avoir donné la démonstration synthétique de la principale proposition ,

AVERTISSEMENT.

Je donne les opérations par algebre, pour avoir des formules plus générales & pour diminuer la longueur des démonstrations. Enfin j'ai terminé par examiner les courbes que l'on peut couper dans des cônoïdes quelconques formés par des cercles faits sur les ordonnées d'une section conique quelconque. Cette recherche me conduit encore de nouveau aux courbes qui sont asymptotes les unes par rapport aux autres: cette propriété qui n'avoit été conclue que par induction pour la parabole, se trouve démontrée dans toute la rigueur géométrique. En un mot, je démontre dans cette dernière partie que dans un conoïde quelconque de quelque manière qu'on puisse le couper, les courbes qui en resulteront seront toujours de simples Sections coniques; & que toutes les courbes coupées dans chacun de ces solides par différents plans parallèles seront des courbes semblables, & asymptotes les unes à l'égard des autres dans le paraboloïde & l'hyperboloïde seulement, dans le cas où le plan coupant est parallèle au diamètre du conoïde.






DES SECTIONS CONIQUES

CONSIDEREES DANS LE CONE

LIVRE CINQUIEME.

480.  Ous allons présentement considérer dans le solide les courbes qui ont été l'objet des trois premiers livres, & faire voir que ces courbes sont précisément celles qui résultent des différentes sections d'un cône, ce qui les a fait appeller en général *Sections coniques*.

DÉFINITIONS.

I.

481. Si l'on imagine un cercle $AGBA$ (*fig. 142*) dont le centre est C , un point S placé au de^hors du plan de ce cercle, & une ligne droite AS , qui parcourt par son extrémité A la circonférence du cercle ACB ; tandis que son autre extrémité S est fixement attachée au point S ; la surface engendrée par ce mouvement sera appelée *Surface conique*. Si l'on

Suppose la ligne AS prolongée en E , elle décrira aussi une surface conique qui sera semblable à la première. Les deux ensembles sont appelées *surfaces coniques opposées*.

I I.

482. Le solide renfermé par la surface conique & le cercle $AGBA$, est appelée *Cône*.

I I.

483. Le point S placé comme nous l'avons dit, est le *Sommet* du même cône.

IV.

484. Une ligne droite menée du sommet S au centre C du cercle $AGBA$, est appelée *L'axe* du cône.

V.

485. Le cercle $AGBA$ est appelé *Base* du cône.

VI.

486. Si l'axe CS est perpendiculaire au plan du cercle qui sert de base, le cône sera appelé *Cône droit*.

V I I.

487. Si le même axe est oblique au plan de la base, le cône sera nommé *Scalène*.

488. N. B. On supposera dans ce qui suit, que les cônes dont nous parlerons sont des cônes scalènes ou obliques, afin de rendre les démonstrations plus générales.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

489. Une ligne droite SF (fig. 143) menée par le sommet du cône & par un point quelconque de la surface conique, est toute entière dans cette surface.

DÉMONSTRATION.

Puisque la ligne AS passe toujours par le sommet S , en décrivant la surface conique, elle aura nécessairement deux points communs avec la ligne SF ; donc elle se confondra avec elle; donc la ligne SF est toute entière dans la surface conique. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

490. Donc si l'on prolonge la ligne SF d'une grandeur indéfinie; elle rencontrera nécessairement le cercle AGB dans un point G de sa circonférence, puisque tous les points de cette circonférence, sont à la surface conique.

COROLLAIRE II.

491. Donc si par le sommet S on mène une ligne au-de-dans ou au-de-hors de la surface conique, elle sera toute entière au-de-dans ou au-dehors de la même surface, & ne pourra plus la rencontrer en aucun point; quand elle seroit prolongée à l'infini.

PROPOSITION II.

THÉOREME.

492. Si l'on coupe un cône ASB par un plan qui passe par le sommet S ; la section sera un triangle. (fig. 143)

DÉMONSTRATION.

Que la section de la base du cône par le plan coupant , soit représentée par AG qui sera une ligne droite. Par les points A, G je mène au sommet S les droites AS, GS qui seront des lignes droites (art. 481) renfermées dans le plan coupant ; d'où il suit évidemment que la section est un triangle. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

493. Donc si le plan coupant passe par l'axe du cône , la section sera encore un triangle ; puisque l'axe passe nécessairement par le sommet S du cône. (art. 484)

PROPOSITION III.

THÉOREME.

494. Si une ligne droite FD joint deux points quelconques D, F de la surface conique , je dis qu'elle est toute entière au-de-dans du cône , & qu'étant prolongée elle passera au-de-hors.

DÉMONSTRATION.

Par le sommet S & les points F, D soient menées les lignes SD, SF que l'on prolongera jusqu'à la circonférence du cercle qui est la base

du cône; il est évident que la ligne AG sera au-de-dans du cercle, & que la section GSA sera un triangle; cela posé, puisque les côtés du triangle sont renfermés sur la surface conique, le triangle sera au-de-dans du cône & partant la ligne DF sera aussi au-de-dans du même cône. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

495. Si l'on mène parallèlement à la base du triangle par l'axe des lignes droites comme DI ; je dis qu'elles seront coupées en deux également par l'axe, & qu'elles seront entr'elles comme leurs distances au sommet S du cône.

DÉMONSTRATION.

Que le triangle ASB soit la commune section du cône & du plan qui passe par l'axe, sur laquelle se trouve la ligne DI coupée par le même axe au point L . Puisque cette ligne est parallèle à la ligne AB , les triangles ACS , DLS , BCS , ILS seront semblables & donneront $CS : LS :: AC : DL$ & $CS : LS :: BC : LI$ donc $AC : DL :: BC : LI$ & partant $DL = LI$, puisque $BC = AC$. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

496. Si l'on coupe un cône par un plan parallèle à sa base, la section sera un cercle, dont le centre se trouvera sur l'axe du même cône.

DÉMONSTRATION.

Soit le cône *ASB* (fig. 144) coupé par le plan *DKE* parallèle à sa base; je dis que la figure *DKED* qui résulte de cette section, est un cercle dont le centre est en *F* sur l'axe *CS*.

Pour le prouver, imaginons que le cône est encore coupé par un plan quelconque *CGS*, qui passe par l'axe. Les droites *CG*, *FK* dans lesquelles ce plan coupe les plans parallèles *AGB*, *DKE* seront parallèles entr'elles ainsi que les lignes *DE*, *AB* qui représentent les sections des mêmes plans parallèles par le triangle *ASB*. Donc les triangles *ACS*, *DFS*; *GCS*, *KFS* seront semblables & donneront $AC : DF :: CS : FS$ & $CS : FS :: CG : FK$, donc $AC : DF :: CG : FK$; mais puisque la base est un cercle dont le point *C* est le centre, $AC = CG$; donc $DF = FK$; d'où il suit clairement que la section *DKE* est un cercle qui a pour centre le point *F* de l'axe, puisque toutes les lignes menées de ce point à la circonférence sont égales entr'elles. C. Q. F. D.

LEMME.

497. Si dans une figure curviligne *AEDB* (fig. 145) les perpendiculaires *EG*, *DF* à une droite *AB* menée au-de-dans de cette figure, sont telles que leurs quarrés soient égaux aux rectangles $AG \times GB$ ou $AF \times FB$ des parties de cette ligne; la figure sera un cercle.

Soit divisée la ligne AB en deux également en C & soient menées de ce point les lignes CD , CE aux extrémités des perpendiculaires DF , EG ; à cause du triangle rectangle CDF on a $DF^2 = CD^2 - CF^2$; & par hypothèse $DF^2 = AF \times FB$ ou par le Lemme fondamental $CB^2 - CF^2$; donc $CD^2 - CF^2 = CB^2 - CF^2$; d'où il suit que $CD = CB$; & partant la figure est un cercle. C. Q. F. D.

498. N. B. Comme on parle souvent du triangle par l'axe; pour une plus grande précision, il est bon de connoître les positions que ce triangle peut avoir à l'égard de la base du cône dans un cône oblique. On remarquera donc que de tous les triangles par l'axe que l'on peut mener dans un cône scalène, qui sont en aussi grand nombre qu'il y a de points dans la demi-circonférence de la base de ce cône, il n'y en a qu'un seul qui puisse faire angle droit avec cette base. Pour le déterminer, voici ce qu'il faut faire. Du sommet S du cône (fig. 143) on abaissera une perpendiculaire SK sur la base AGB , par le centre C & le point K on menera le rayon CKB , il est évident que le triangle CKS sera perpendiculaire à la base AGB , à cause de la perpendiculaire SK ; donc le triangle ASB qui n'est que le prolongement de celui-ci, fera aussi perpendiculaire à la même base, & de plus il sera le seul triangle par l'axe qui puisse avoir cette propriété, parce que d'un point S on ne peut
abaïſſer

considérées dans le Cône Livre V. 369
 abaisser qu'une seule perpendiculaire à un plan
 & que par deux lignes SK , SL on ne peut faire
 passer qu'un seul plan.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

499. Si l'on coupe un cône scalene ASB (fig. 146)
 par un plan DHE perpendiculaire au plan du trian-
 gle par l'axe ASB , que l'on suppose aussi perpenicu-
 laire à la base de ce cône, de manière que la ligne DE
 commune section du triangle par l'axe & du plan
 DEH qui lui est perpendiculaire, fasse avec le côté SB
 un angle DES égal à l'angle SAB ; la section qui en
 résultera sera un cercle.

DEMONSTRATION.

Par un point H de la surface conique & du
 plan DHE , j'imagine une droite HI perpen-
 diculaire à la ligne DE : il est visible que cette
 ligne sera renfermée toute entière au-de-dans
 du plan coupant DHE . Par cette ligne HI je
 fais passer un plan GHF qui coupe le triangle
 par l'axe dans une ligne FIG parallèle à la base
 AB du même triangle; la nouvelle section sera
 un cercle, comme on l'a démontré, puisque le
 plan FHG est parallèle à la base; l'une & l'autre
 étant perpendiculaires au triangle par l'axe. Cela
 posé, à cause du cercle GHF , on aura $HI^2 = FI \times$
 IG ; reste à faire voir que l'on aura aussi
 $HI^2 = DI \times IE$. Les triangles ASB , ESD sont
 semblables, puisqu'ils ont, outre l'angle com-
 mun en S , l'angle A & l'angle E égaux (par
 construction). Les triangles DIF , GIE seront

aussi semblables par la même raison, puisque l'angle GEI de l'un est égal à l'angle DFI de l'autre, à cause des parallèles AB, FG , & que les angles en I sont opposés au sommet : donc on aura la proportion $DI : IF :: IG : IE$, d'où l'on tire $DI \times IE = IF \times IG = HI^2$. C. Q. F. D.

D É F I N I T I O N.

500. La section DEH est appelée *sou-contraire*, & l'on dit dans ce cas que le cône ASB est coupé par le plan DHE *sou-contrairement*.

P R O P O S I T I O N VII.

T H É O R È M E.

501. Toute ligne comme FH menée d'un point F de la surface conique à un autre point H de la même surface, parallèlement à une ligne DE perpendiculaire à la base du triangle par l'axe, rencontre le plan de ce triangle, & est coupée en deux également par le plan du même triangle. (fig. 147).

D É M O N S T R A T I O N.

Par le point F de la surface conique & le sommet S , soit menée la ligne SF , qui rencontrera la circonférence de la base dans un point I (art. 490) du quel on menera la droite IKL perpendiculaire à la base AB du triangle ASB , & par conséquent parallèle aux lignes FG, DE ; enfin par le sommet S & les points K, L soient encore menées les lignes SK, SL . Cela posé; puisque la ligne IKL rencontre le plan du triangle par l'axe dans

un point K de la ligne SK ; sa parallèle FGH rencontrera nécessairement la même ligne SK dans un point G ; & comme cette ligne SK est la commune section du triangle par l'axe ASB & du triangle ISL , il s'en suit que la droite FGH rencontre le même plan dans un point G . 2°. Elle est coupée en deux également par la même ligne SK , ou par le plan du triangle par l'axe ; car, puisque les lignes IKL , FGH sont parallèles, les triangles IKS , FGS ; LKS , HGS seront semblables & donneront $IK:FG::KS:GS$ & $KS:GS::KL:GH$; donc $IK:FG::KL:GH$; mais $IK=KL$, puisque la ligne IKL est une double ordonnée au diamètre AB ; donc aussi $FG=GH$. On démontrera la même chose de toute autre ligne prise à volonté & parallèle à DE . Donc le triangle par l'axe coupe toutes ces lignes en deux parties égales. C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

502. Supposant toujours le triangle par l'axe ASB (fig. 148) qui coupe un cône quelconque $ADBS$; si on coupe le même cône par un autre plan DEF , de manière que la commune section DGF de ce plan avec la base du cône soit perpendiculaire à la base AB du triangle par l'axe ; la section EG du triangle avec ce nouveau plan, coupera en deux parties égales toutes les lignes comme HK parallèles à la section DF de la base par ce même plan DEF .

A aij

DEMONSTRATION.

Par la proposition précédente, la ligne *HIK* parallèle à une ligne *DF* perpendiculaire à la base du triangle par l'axe rencontre ce même triangle, & par conséquent se trouve divisée en deux également : mais cette ligne étant prise dans le plan *DEF* ne peut rencontrer le triangle, que dans la commune section *EG*; & comme on démontrera la même chose de toute autre ligne prise dans le même plan; il s'en suit que toute ligne parallèle à la perpendiculaire *FD* & comprise dans le même plan sera divisée en deux également par la commune section du triangle par l'axe & du plan *DEF*; pourvû que cette ligne soit terminée de part & d'autre à la surface conique. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

503. Si le triangle par l'axe fait angle droit avec le plan de la base du cône, la ligne *DG* prise sur cette base est perpendiculaire au plan du triangle par l'axe, & partant la ligne *HI* parallèle à la première sera aussi perpendiculaire au même triangle; donc elle sera perpendiculaire à la commune section *EIG* du triangle par l'axe & du plan *DEF* dans lequel elle se trouve. Ce-ci ne peut arriver que dans un seul cas, lorsque le cône est oblique (*art. 498*); au lieu que cela arrivera toujours dans un cône droit, parce que tout triangle par l'axe est perpendiculaire à la base de ce cône. On verra dans la suite l'avan-

Aa ij

tage qu'il y a de prendre un cône oblique, préférablement au cône droit, & de prendre encore dans celui-ci un triangle par l'axe quelconque oblique à la base, afin que les propriétés des sections coniques se trouvent démontrées tout d'un coup par rapport à un diamètre quelconque.

Il faut aussi bien remarquer que cette proposition est encore vraie, si le plan *DEF* se trouvoit disposé de manière qu'il coupât le plan de la base sur son prolongement & au-de-hors du cône.

D É F I N I T I O N.

504. La ligne *EG* qui divise en deux également toutes les lignes parallèles à *DF* & renfermées dans le plan *DEF* est appelée *diamètre* de la section conique formée par le même plan.

P R O P O S I T I O N IX.

T H É O R È M E.

505. Si le diamètre *EG* d'une section quelconque (fig. 149) est placé de manière qu'il ne puisse couper l'autre côté du cône entre le sommet *S* & la base *AB* du triangle par l'axe; la section *DEF* pourra être prolongée à l'infini.

D É M O N S T R A T I O N.

On suppose ici, comme dans toute la suite du livre, que la section conique a les deux conditions suivantes; 1^o. Que le cône est coupé

par l'axe, quelque soit l'angle du triangle par l'axe avec la base; 2^o. Qu'il est encore coupé par un autre plan dont la ligne de commune section avec la base du cône est perpendiculaire à la base du même triangle par l'axe; en outre, dans le présent théorème, je veux que le diamètre EG de la section DEF soit disposé de manière, qu'il ne puisse rencontrer l'autre côté SB au-dessous du sommet; mais qu'il lui soit parallèle, ou qu'il fasse avec le côté SA un angle AEG plus petit que l'angle ASB . Cela posé, il est aisé de démontrer que dans ces deux derniers cas, la section peut être prolongée à l'infini. Imaginons que l'on ait prolongé la ligne EG si loin qu'on voudra, & qu'en même temps le cône & le plan coupant s'allongent à l'infini: par un point quelconque I de la ligne EG soit menée la droite HIK parallèle à DF , & MIL parallèle à AB : il est évident que le plan qui passera par ces deux lignes sera parallèle à la base ADB du cône, & sera par conséquent un cercle. Donc les points H , K seront en même temps dans la surface conique & dans le plan EFD ; d'où il suit que la section pourra être prolongée aussi loin qu'on voudra. C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THÉOREME.

506. Supposant toutes choses comme dans la proposition précédente, avec cette différence que le plan

du triangle par l'axe est perpendiculaire à la base du cône & que le diamètre DE (fig. 150) de la section coupe les deux côtés du cône, sans être parallèle à la base, ou posé soucontrairement ; je dis que la section ne peut pas être un cercle,

D É M O N S T R A T I O N .

Par un point quelconque I du diamètre de la section, je fais passer une droite FIG parallèle à la base AB du triangle par l'axe ; par cette ligne je fais passer un plan parallèle à la base du cône, dont la commune section avec le même cône sera un cercle, (art. 496) ; & dont la ligne de commune section avec le premier plan coupant, sera la ligne HIK perpendiculaire à la droite FIG . Si la courbe $DHEK$ étoit un cercle, on auroit $HI^2 = DI \times IE$; & parce que la section $FKGH$ est un cercle, on a $HI^2 = FI \times IG$; donc on auroit $DI \times IE = FI \times IG$, d'où l'on tire cette proportion $DI : IG :: FI : IE$; ainsi les triangles DIF , GIE seroient semblables & partant à cause de l'angle en E qui seroit égal à l'angle en F , dans le cas présent la section seroit sou-contraire ; ce qui est contre l'hypothese. Donc la section ne peut pas être un cercle. C. Q. F. D.

Il faut bien remarquer que dans cette proposition on suppose que le triangle par l'axe fait angle droit avec le plan de la base du cône. Car dans tout autre cas lors même que la section

seroit sou-contraindre, la courbe ne seroit pas un cercle, parce que les ordonnées ne feroient pas angle droit avec la base.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

507. Si le diamètre EG de la section (fig. 151) est parallèle au côté SB du cône, la courbe DEF sera une parabole.

DÉMONSTRATION.

On suppose toujours que le cône ASB est coupé par l'axe, quelque soit l'angle que fait le plan ASB avec celui de la base. On suppose encore qu'il est coupé par un autre plan DEF tel que la commune section DGF de ce second plan avec la base soit perpendiculaire à la base du triangle par l'axe, & que le diamètre EG soit parallèle au côté SB du cône, ou pour mieux dire, du triangle par l'axe. Cela posé, par un point K quelconque du diamètre de la section, je mene une ligne NKO parallèle à la base AB , & une ligne IKL parallèle à la ligne DEF . Puisque les lignes AB , DF sont toutes deux dans la base, le plan $NIOL$ qui passera par leurs parallèles NO , IL sera parallèle à la base; & par conséquent un cercle dont la ligne IK est une ordonnée: donc $IK^2 = NK \times KO$; & de même $DG^2 = AG \times GB$; d'où l'on tire cette proportion $IK^2 : DG^2 :: NK \times KO : AG \times GB$; mais à cause des

paralleles SB , GE , les droites KO , GB sont égales, puisqu'elles sont paralleles; *construction* : donc, en divisant le dernier rapport par ces mêmes lignes, $IK^1 : DG^2 :: NK : AG$ & à cause des triangles semblables ENK , EAG ; $NK:AG::EK:EG$, donc $IK^2:DG^2::EK:EG$; d'où il suit évidemment que la section est une parabole, puisque dans cette courbe les quarrés des ordonnées, sont comme les abscisses correspondantes. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

508. Donc cette courbe a toutes les propriétés que nous avons démontré en la considérant hors du cône, & décrite sur un plan.

COROLLAIRE II.

509. Si l'on fait cette proportion $EK : IK :: IK.PM$, cette 3eme. proportionnelle sera le parametre la courbe, car de cette proportion on tire $IK^2 = EK \times PM$. Je dis de plus que le quarré de toute autre ordonnée DG sera égal au rectangle de son abscisse par le même parametre. Car, par la précédente proposition, $IK^2:DG^2::EK:EG::EK \times PM:EG \times PM$. Mais $IK^2 = EK \times PM$: donc $DG^2 = EG \times PM$.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

510. Dans la parabole, le parametre PM est

fasse passer une ligne FS ; je dis que cette ligne passera par les foyers de toutes les paraboles parallèles à la première : car on a vû dans le premier livre , que tout foyer de parabole est éloigné du sommet de cette courbe , du quart du parametre de l'axe de la même courbe ; donc si les points F, f sont les foyers des paraboles représentées par ces sections ; ils seront désignés par $\frac{1}{4}P$ & $\frac{1}{4}p$, en supposant que les parametres entiers sont P & p ; & comme , par le corollaire précédent , les parametres sont proportionels aux lignes ES, HS ; on aura $EF : Hf :: ES : HS$; mais à cause des triangles semblables SEF, SHf on aura aussi la même proportion , d'où il suit évidemment que le point f est le foyer de la parabole GHI .

COROLLAIRE IV.

§ 14. On peut encore énoncer le dernier corollaire d'une manière plus générale , comme il suit : si par le sommet S d'un cône quelconque & un point quelconque d'une parabole coupée dans ce cône , on fait passer une ligne droite ; cette ligne passera par tous les points semblablement placés dans toutes les paraboles imaginables , parallèles à la première ; & réciproquement , si une ligne quelconque passe par deux points semblablement placés de deux paraboles différentes parallèles entr'elles , elle passera nécessairement par le sommet du cône dans lequel elles ont été coupées.

COROLLAIRE V.

515. Il suit de-là que l'on pourra toujours couper aisément dans un cône une parabole dont le parametre de l'axe soit donné, de quelque espece que soit le cône proposé, droit ou oblique. Il faudra commencer par trouver le triangle par l'axe dont le plan soit perpendiculaire à celui de la base du cône; ensuite on fera cette proportion $AS \times SB : AB^2 :: P$ est à un quatrieme terme, qui sera la distance du sommet du cône au sommet de la parabole demandée & déterminée sur le triangle par l'axe que l'on a supposé perpendiculaire au plan de la base.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

516. Si le diamètre de la section (fig. 153) coupe les deux côtés du triangle par l'axe entre le sommet & la base du même triangle, la courbe sera une ellipse; pourvu que le triangle ASB ne soit pas semblable au triangle ESD; seulement dans le cas où le plan du triangle par l'axe est perpendiculaire au plan de la base du cône.

DÉMONSTRATION.

Par deux points quelconques G, K de la section, on menera des lignes PGO, MKN paralleles à la base du triangle par l'axe, & par ces lignes on imaginera des plans OFP, MIN

parallèles au plan de la base, qui seront par conséquent des cercles (*art.* 496), dans lesquels on tirera les droites FG , IK perpendiculaires aux lignes OP , MN , & par conséquent ordonnées à ces mêmes diamètres. Cela posé, par la propriété des cercles, on a

$FG^2 = OG \times GP$ & $IK^2 = MK \times KN$, & à cause des triangles semblables DGO , DKM , EGP , EKN ; on aura pour les deux premiers

$$DG : DK :: OG : MK,$$

& pour les seconds $EG : EK :: GP : KN$, donc en multipliant par ordre

$DG \times EG : DK \times EK :: OG \times GP : MK \times KN$; à cause des cerc. OFP , MIN , $OG \times GP :: MK \times KN : FG^2 : IK^2$ donc on aura *inverten.* $FG^2 : IK^2 :: DG \times EG : DK \times EK$. D'où il suit que la courbe est une ellipse, puisque les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme rectangles de leurs abscisses. C. Q. F. D.

R E M A R Q U E.

517. Si la section étoit sou-contraire, les triangles DGO , EGP seroient semblables, & par conséquent les rectangles $DG \times GE$ & $OG \times GP$ seroient égaux; donc le quarré de l'ordonnée FG seroit égal au rectangle de $OG \times GP$; & partant la courbe fera un cercle; si la même ordonnée fait angle droit avec son diamètre, ce qui ne peut arriver que dans le cas où le triangle par l'axe est perpendiculaire au plan de la base comme nous en avons déjà averti. Ainsi dans le cône droit toute section sou-contraire donnera des cercles, parce que tous les

considérées dans le Cône. Livre V. 383
 triangles par l'axe sont perpendiculaires à la base;
 & dans les cônes scalenes, il n'y aura qu'un seul
 cas où cela passe puisse arriver, parce que nous
 avons démontré qu'il ne peut y avoir qu'un
 triangle par l'axe perpendiculaire à la base.
 Dans les autres triangles, les sections sou-
 contraires donneront des ellipses dont les diametres
 conjugués seront égaux.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

518. Une ligne RS (fig. 153) *parallele aux ordonnées qui divise le diametre DE en deux également, est le diametre conjugué au premier, & de plus les ordonnées FG, IK également éloignées du diametre RS sont égales entr'elles.*

DÉMONSTRATION.

La ligne RS étant *parallele aux ordonnées*, fera elle-même une ordonnée; & comme, *par la proposition précédente*, les quarrés de ces lignes sont entr'eux comme les rectangles de leurs abscisses, le rectangle DS par ES fera le plus grand de tous: puisque, par hypothese, le diametre DE est coupé en deux également au point S; donc aussi la ligne RS sera la plus grande ordonnée, & partant le diametre conjugué au premier. C. Q. F. D.

20. Les ordonnées également éloignées du point S sont égales, puisqu'elles sont comme les rectangles $DK \times KE$, $DG \times GE$ qui sont égaux. C. Q. F. 20. D.

COROLLAIRE

519. Il suit de-là que l'ellipse qu'on coupe dans le cône est précisément celle que nous avons examiné sur un plan dans le second livre, & l'on voit par - là que cette courbe est une courbe symétrique, contre l'idée de certaines personnes qui s'imaginent qu'elle doit être plus arrondie vers le bas du cône que vers le sommet, parce que le cône va toujours en s'élargissant de haut en bas.

PROPOSITION XV.

THÉOREME.

520. Si l'on mène par le sommet *S* d'un cône *ASB* une ligne *SK* (fig. 154) parallèle au diamètre de la section *DLE*, jusqu'à ce qu'elle rencontre la base du triangle par l'axe prolongée autant qu'il sera nécessaire en *K*, & qu'on fasse cette analogie $SK^2 : AK \times KB :: DE : EH$; ce quatrième terme sera le paramètre du diamètre *DE*.

DÉMONSTRATION.

Puisque la courbe est une ellipse, on aura, en supposant *PM* ordonnée au diamètre *DE* & *LCI* conjugué au même diamètre, $EM \times MD : PM^2 :: DE^2 : LI^2$, & parce que la ligne *EH* est supposée le paramètre du diamètre *DE*, on aura $DE^2 : LI^2 :: DE : EH$. Donc $EM \times MD : PM^2 :: DE : EH$. Ainsi pour démontrer que la ligne *EH* déterminée comme on le suppose, est réellement le paramètre du diamètre

diametre DE , il suffira de faire voir que $SK^2 : AK \times KB :: EM \times MD : PM^2$. Cela posé ; à cause des triangles semblables ASK , EMN , qui sont formés avec un des côtés du triangle par l'axe & des lignes parallèles à la base du même triangle, on aura $SK : AK :: EM : MN$; & à cause des triangles semblables SKB , DMO , on aura pareillement $SK : KB :: DM : MO$; donc en multipliant ces deux proportions termes par termes, il viendra $SK^2 : AK \times KB :: EM \times DM : MN \times MO$, mais $MN \times MO = PM^2$, ainsi en substituant, il viendra $SK^2 : AK \times KB :: EM \times DM : PM^2$. D'où il suit évidemment que la ligne EH déterminée par cette proportion est le parametre du diametre DE . C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

§ 21. Puisque $SK^2 : AK \times KB :: DE : EH$, il suit de-là que l'on aura aussi $SK^2 : AK \times KB :: DE^2 : LI^2$ c'est à-dire que le quarré de la ligne SK menée par le sommet du cône dans le plan du triangle par l'axe, & parallèle au diametre de la section, est au rectangle des parties de la base du triangle par l'axe, prolongée autant qu'il est nécessaire; comme le quarré du diametre DE est au quarré de son conjugué.

COROLLAIRE II.

§ 22. Il suit encore de-là que l'on a $EM \times MD : PM^2 :: EF \times FD : AF \times FB$; car à cause des triangles semblables EMN , EFA ; on aura

Bb

$EM : MN :: EF : FA$; & à cause des triangles semblables MDO , BDF ; $MD : MO :: DF : FB$; donc en multipliant par ordre on aura
 $EM \times MD : MN \times MO :: EF \times FD : FA \times FB$.
 mais à cause du cercle dont ON est le diamètre $MN \times MO = PM$: donc en substituant on aura
 $EM \times MD : PM^2 :: EF \times FD : FA \times FB$.

COROLLAIRE. III.

§ 23. Il suit des deux derniers corollaires, que les diamètres conjugués sont toujours égaux dans le cercle ; & que les quarrés des ordonnées sont égaux aux rectangles de leurs abscisses ; car dans le cas où la section est un cercle, les lignes SK & AK deviennent parallèles & infinies : donc le quarré SK^2 & le rectangle $AK \times KB$ deviennent égaux, & dans le cas du second corollaire, les lignes AF , EF deviennent parallèles & infinies aussi bien que les lignes FD , FB ; donc les rectangles $EF \times FD$, $FA \times FB$ deviennent égaux ; ainsi $PM^2 = EM \times MD$.

COROLLAIRE IV.

§ 24. Si l'on suppose encore une autre ellipse ed parallèle à la première & dont le diamètre ed rencontre la base du triangle par l'axe en f , on en déterminera le paramètre que nous désignerons par p , en faisant la même analogie $SK^2 : AK \times KB :: de : p$; donc si l'on appelle P le paramètre du diamètre DE , on aura $DE : P :: de : p$, puisque les deux premiers

rapports des proportions qui déterminent, les parametres sont égaux. Donc toutes les ellipses coupées dans un cône par des plans paralleles entr'eux sont des figures ou ellipses semblables, puisque leurs diametres sont proportionels à leurs parametres.

C O R O L L A I R E V.

525. Il suit encore de - là que si l'on mene par le sommet du cône & un point quelconque d'une ellipse une droite quelconque, cette ligne passera par tous les points semblablement placés dans toutes les ellipses coupées dans le même cône par des plans paralleles entr'eux. Ainsi la ligne qui passe par le foyer ou le centre d'une ellipse & par le sommet du cône, passera aussi par les foyers ou les centres de toutes les ellipses semblables & paralleles à la premiere.

S C H O L I E.

526. Il suit de-là, que si l'on a les deux axes d'une ellipse ou seulement l'axe & un foyer, ou bien encore l'axe & son parametre, on pourra toujours couper dans un cône quelconque une ellipse égale à la proposée. Car la proportion du dernier Théorème suffit pour résoudre le problème. Ceux qui sont tant soit peu au fait de l'application de l'algebre à la Géométrie pourront s'exercer à la solution de ce problème, qui est nécessairement du second degré, on fera attention, qu'en supposant que l'axe est donné avec son parametre; il faut commencer dans

un cône scalène par déterminer, comme pour la parabole, le plan du triangle par l'axe perpendiculaire au plan de la base du cône; afin que les ordonnées soient d'équerre avec l'axe. Si l'on n'a qu'un diamètre & son parametre, il faudra encore, pour fixer le problème, que l'on connoisse l'angle des ordonnées, & l'on pourroit encore par le secours de la même proportion parvenir à la solution du problème dans ce cas qui seroit le plus compliqué.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

§ 27. Si l'on coupe un cône ASB (fig. 155) de manière que le diamètre de la section DPG, rencontre le côté SB du triangle par l'axe, au de-là du sommet par rapport à la base du même triangle, la section sera une hyperbole.

DÉMONSTRATION.

Par un point quelconque *M* du diamètre de la section, soit mené un plan qui coupe le triangle par l'axe dans la ligne *NO* parallèle à la base du même triangle, & le plan de section dans une ligne *PM* parallèle à la section *GF* du plan de section avec celui de la base. Il est évident que la figure *NPO* sera un cercle dont le diamètre sera la ligne *ON*, & dont *PM* sera l'ordonnée. Cela posé, à cause des triangles semblables *DMN*, *DFA*; $DM:MN::DF:FA$; & à cause des triangles *EMO*, *EFB* on aura aussi $EM:MO::EF:FB$; donc en multipliant par ordre $EM \times EM:MN \times MO::DF \times EF:FA \times FB$; mais à

cause des cercles $NPO, AGB; PM^2 = MN \times MO;$
 & $FG^2 = FA \times FB$: donc en substituant ces
 valeurs & alternant , on aura au lieu de la der-
 niere proportion , $DM \times EM : DF \times EF ::$
 $PM^2 : FG^2$; d'où il suit que la courbe est une
 hyperbole , puisque les quarrés des ordonnées
 sont entr'eux comme les rectangles de leurs ab-
 scisses. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

528. Il suit de - là , que si l'on suppose
 un cône opposé au premier par le sommet &
 qu'on prolonge le plan coupant , jusqu'à ce qu'il
 coupe le nouveau cône terminé par un cer-
 cle parallele à la base du premier ; la section sera
 l'hyperbole opposée à la premiere. La démon-
 stration seroit entierement la même , puisque les
 triangles $Dmo, Dfb; Emn, Efa$ sont toujours
 semblables , & donnent les mêmes proportions.
 Donc ces courbes sont précisément les mêmes
 que celles que nous avons démontré dans le troi-
 sieme livre ; & elles en ont toutes les propriétés.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

529. Si par le sommet S du cône dans le plan du
 triangle par l'axe (fig. 155) on mene une droite SK
 parallele au diametre de la section , & qu'on fasse cette
 proportion $SK^2 : AK \times KB :: DE : EH$; je dis que
 cette ligne sera le parametre du diametre DE .

Bb iij

D É M O N S T R A T I O N .

A cause des triangles semblables BKS , BFE on aura $SK : KB :: EF : FB$, & à cause des triangles semblables KAS , FAD aussi semblables, $SK : AK :: DF : FA$; donc en multipliant par ordre, on aura $SK^2 : AK \times KB :: EF \times DF : FB \times FA$, mais à cause du cercle AGB & de l'hyperbole dont FG est une ordonnée; $EF \times DF : FB \times FA$ ou $FG^2 :: DE^2 : LI^2$, en supposant LI diamètre conjugué à DE , & par la nature du parametre $DE^2 : LI^2 :: DE^2 : EH^2$, donc puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompu; $SK^2 : AK \times KB :: DE : EH$, d'où il suit évidemment que cette ligne est le parametre. C.Q.F.D.

C O R O L L A I R E . I.

§ 30. Il suit de-là que toutes les hyperboles paralleles entr'elles & coupées dans un même cône sont des figures semblables, puisque les lignes homologues sont proportionnelles; car si l'on imagine une autre courbe quelconque parallele à la première, on démontreroit de la même maniere que le rapport du diamètre au parametre est celui de SK^2 à $AK \times KB$, ce qui est suffisant pour en déduire cette vérité.

C O R O L L A I R E . I I.

§ 31. Il suit encore de-là que si par le sommet S & un point quelconque d'une hyperbole on mene une droite indéfinie, cette droite passera par tous les points semblablement placés dans toutes les hyperboles possibles paralleles à

la première ; & réciproquement , si une ligne passe par deux points semblablement placés dans deux hyperboles semblables & parallèles entr'elles ; cette ligne passera par le sommet *S*. Cette vérité se déduit immédiatement du premier corollaire. On peut donc établir , qu'en général dans une section conique , une ligne droite qui passe par le sommet du cône & par un point de cette section ; passera par tous les points semblablement placés dans toutes les sections parallèles entr'elles. Ainsi la propriété de l'axe du cône qui passe par les centres ou foyers de tous les cercles parallèles à la base, devient générale & s'étend à toutes les sections coniques.

COROLLAIRE. III.

532. Si la ligne *SK* est moyenne proportionnelle entre les parties *AK* & *KB* , le paramètre sera égal au diamètre ; d'où il suit que l'hyperbole est équilatère. On peut encore conclure de cette proposition , que dans un cône dont le triangle par l'axe à un angle aigu au sommet. On ne peut couper aucune hyperbole équilatère ; car il est aisé de se convaincre , que dans un triangle tel que *ASB* aucune ligne comme *SK* menée du sommet à la base ne peut être moyenne entre les parties *AK* & *KB* , que l'angle *ASB* ne soit droit ou obtus.

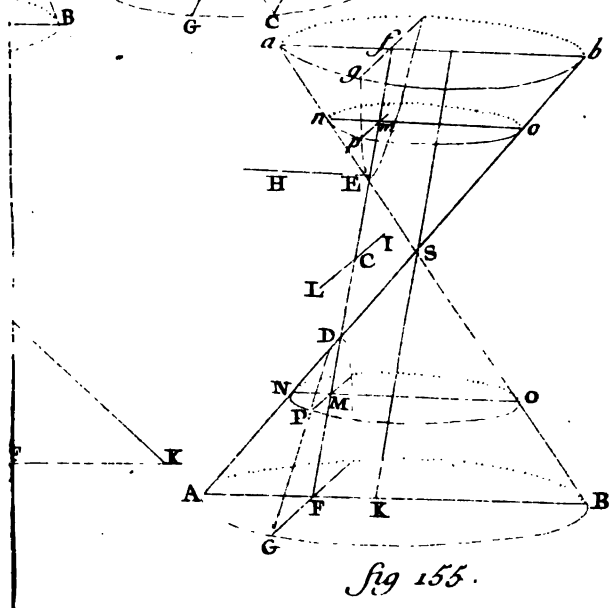
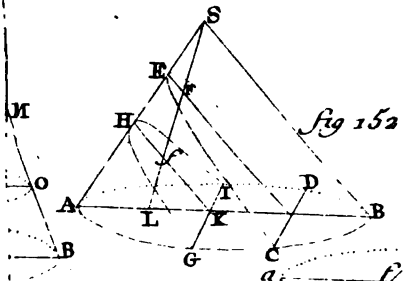
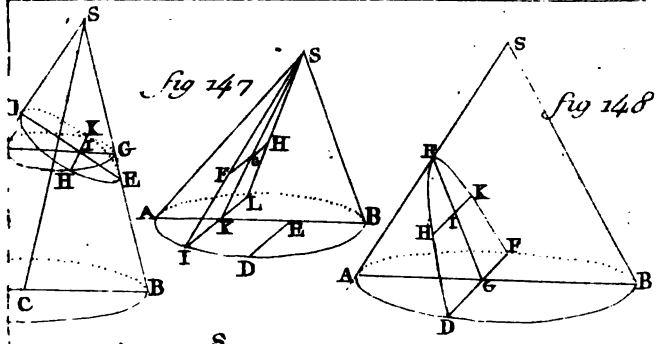
COROLLAIRE IV.

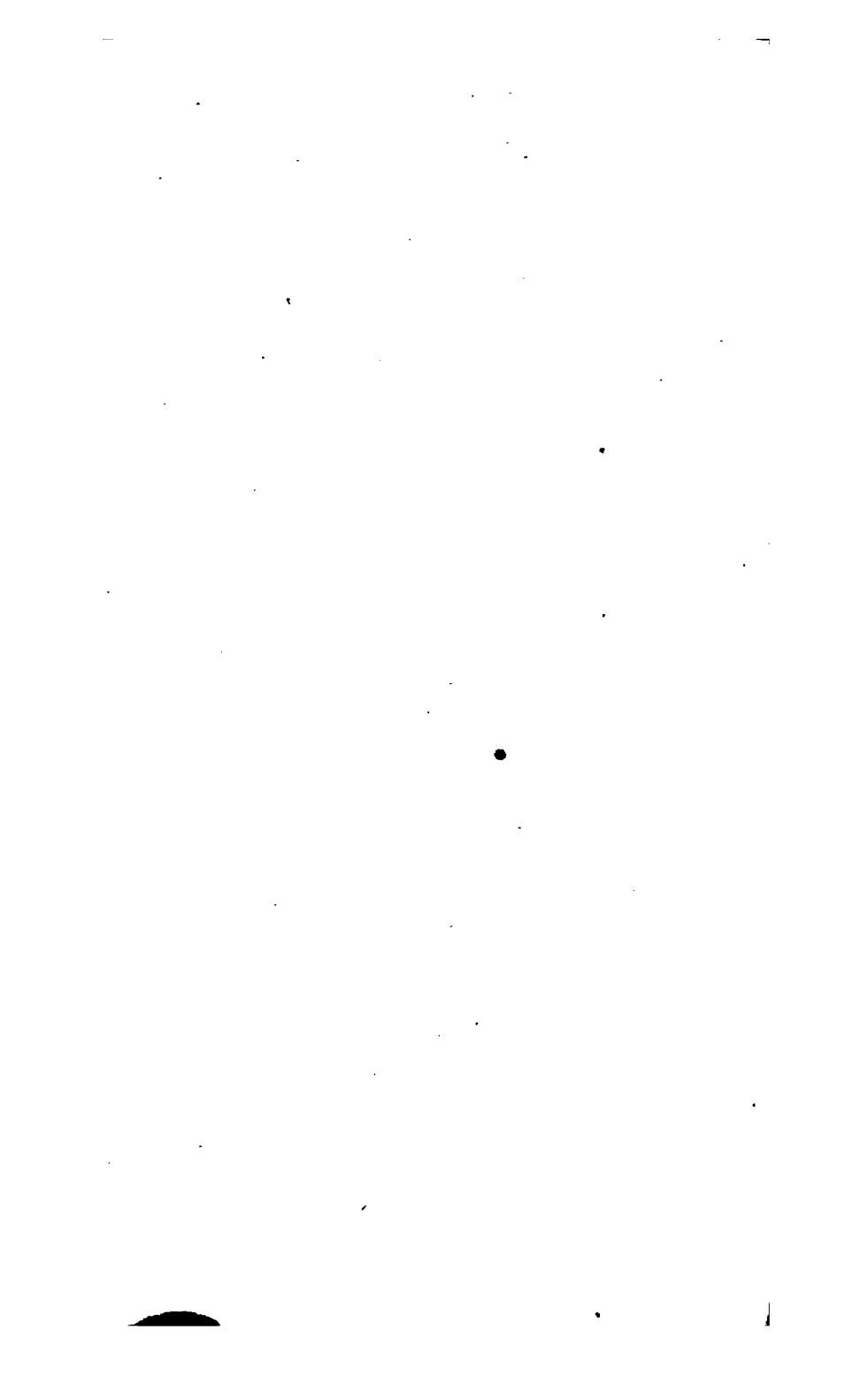
533. Si l'on regarde l'hyperbole équilatère comme la plus grande possible , on peut par le

secours de cette proportion couper dans un cône donné la plus grande hyperbole possible, c'est - à - dire celle qui approche le plus de l'hyperbole équilatère. Pour cela, il n'y a qu'à déterminer une ligne SK qui soit telle que le carré de SK , soit le plus petit possible & le rectangle de AK par KB le plus grand possible; par exemple, si le cône est droit, & qu'on suppose la ligne SK perpendiculaire à la base AB , cette ligne sera la plus petite qu'on puisse mener du sommet à un point de la base du triangle par l'axe & le rectangle de AK par KB , sera le plus grand possible, puisque cette ligne est divisée en deux également par la ligne SK dans la supposition présente, donc le rapport de $AK \times KB$ à SK^2 approchera le plus qu'il sera possible de l'égalité; donc le paramètre sera aussi le plus grand qu'il est possible par rapport au diamètre, & partant l'hyperbole sera la plus approchante de l'hyperbole équilatère.

COROLLAIRE V.

534. Si la ligne DE diamètre de l'hyperbole devient parallèle à l'un des côtés du cône; la ligne SK se confondra avec le côté SB , la partie KB devient zéro, & partant le rectangle de AK par $KB = AK \times 0 = 0$, donc le rapport du diamètre au paramètre sera celui de SB^2 à zéro; d'où il suit évidemment que la courbe qui est dans ce cas une parabole devient la plus petite hyperbole possible; & que la parabole peut être réellement prise pour une hyperbole dont le diamètre est infini.





COROLLAIRE. VI.

535. On pourroit encore faire usage de cette proposition pour couper dans un cône une hyperbole dont les axes ou les diametres seront donnés de grandeur, & le problème seroit toujours susceptible de deux solutions; tant que les diametres ou les axes proposés ne donneront pas un angle des asymptotes plus grand que celui de la plus grande hyperbole possible qu'on puisse couper dans le cône proposé: si les diametres ou les axes sont ceux de la plus grande hyperbole possible, les deux racines de l'équation seront égales: dans le cas d'un angle plus grand, le problème seroit impossible pour le cône proposé.

536. N.B. Il faut bien remarquer que quand nous parlons de la plus grande hyperbole possible, on n'entend pas celle qui a les deux plus grands diametres possibles, mais en général, celle dont l'angle des asymptotes est le plus près d'un droit, dans un cône qui a l'angle ASB aigu. De ce genre sont toutes les hyperboles formées par des plans parallèles au triangle par l'axe, dans un cône droit, ou par des plans perpendiculaires à la base du cône.

D É F I N I T I O N.

537. Si par le point K où la ligne SK parallèle au diametre de l'hyperbole rencontre la base du triangle par l'axe (fig. 156), on mené une droite IKL parallèle à la commune section FH du plan

coupant & de la base, cette ligne sera appelée *directrice* de la section FDH & si par la ligne SK & la ligne IKL , on fait passer un plan LSL ; ce plan sera nommé *le plan de la directrice*.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

§ 38. Supposant toutes choses comme dans la définition précédente; si par les points I , L extrémités de la directrice, on mene les tangentes MI , NL au cercle qui sert de base au cône, prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en O , sur la base du triangle par l'axe aussi prolongée; & si par les lignes SI , MIO ; SL , NLO on fait passer deux plans prolongés autant qu'il sera nécessaire, je dis que les lignes CM , CN dans lesquels ils rencontreront le plan de la section FDH seront les asymptotes de cette courbe

DÉMONSTRATION.

Imaginons encore un plan $PDQa$, qui passe par le sommet D de l'hyperbole, & qui soit parallèle à la base du cône; ce plan coupera les plans CMO , CNO dans les lignes Po , Qo , qui se trouveront parallèles aux lignes MO , NO ; & l'on démontrera aisément que ces mêmes lignes seront tangentes au cercle $Dibl$ que ce même plan coupe dans le cône, dans les points i , l extrémités de la commune section du plan de ce cercle avec celui SIL de la directrice. La ligne PDQ étant dans le plan de la section DfH ,

fera perpendiculaire à la ligne $D.b$, & par conséquent tangente en D ; cela posé on aura $DP^2 = Pi^2$ par la propriété des tangentes du cercle; & dans la base, on aura pareillement par la propriété des sécantes MH & de la tangente MI , $MH \times MF = MI^2$; mais nous avons déjà vu que les lignes MI , Pi sont parallèles, & les lignes MP , li le sont aussi, puisqu'elles sont les sections de plans parallèles sur un troisième plan; donc $IMPi$ est un parallélogramme, donc $MI = Pi$; donc $DP^2 = MF \times MH$; on fera voir de la même manière que le rectangle d'une autre ligne telle que $mfgh$ parallèle à la ligne $MFGH$, sera égal au carré de la même ligne DP ; d'où il suit évidemment que les lignes CM , CN sont les asymptotes; car il n'est pas moins évident que les lignes DP , DQ ; Pi , Qi sont toutes égales entr'elles. C. Q. F. D.

OBSERVATION.

539. Nous avons supposé que les lignes lo , io qui sont les sections des plans CMO , CNO avec le plan $PDQo$ sont tangentes aux extrémités de la double ordonnée il , qui est la section de ce même plan avec celui de la directrice. Si l'on avoit quelque difficulté là-dessus, voici comme on peut le démontrer. Par hypothèse les lignes IO , LO sont tangentes aux points I , L , & se rencontrent en Q sur le prolongement du diamètre RO . Supposons que du sommet S au centre R du cercle de la base du cône, on ait

mené la ligne SR , cette ligne passera par le point r , centre du cercle $Dibl$, parallèle à la base, & l'on aura à cause des triangles semblables SRK , Srk ; $RK:rk::SK:S_k$; & à cause des triangles SKB , S_kb aussi semblables, on aura $SK:S_k::KB:kb$, donc $RK:rk::KB:kb$ & composendo $RK:rk::RK+KB$ ou $RB:rk+kb$ ou rb , & à cause des triangles semblables SRO , Sro on aura $SR:Sr::RO:ro$ donc les lignes RK , RK , RB , RQ ; seront proportionnelles aux lignes rk , rb ; ro donc puisque l'on a à l'au-
se de la tangente IO , $RK:RB::RB:RO$ on aura aussi $rk:rb::rb:ro$, d'où il suit que la ligne io est tangente en i ; puisque le point i est à la surface du cône, & qu'il est l'extrémité de l'ordonnée ki .

COROLLAIRE I.

540. Il suit de cette proposition, que la ligne Oo commune section des plans $MPoO$, $NQoO$ passe nécessairement par le point S sommet du cône, qu'elle est dans le plan du triangle par l'axe, qui divise les éléments de la section FDH en deux parties égales, & que le point C où elle va aboutir ainsi que les lignes MP , NQ est le centre des hyperboles opposées.

COROLLAIRE II.

541. Il suit encore de-là qu'une ligne comme MI prise sur le prolongement de la tangente MIO , & comprise entre le plan de la directrice, & celui de la section est le demi-diamètre conjugué au demi-diamètre DC ; cela est évident,

parceque nous avons démontré dans l'hyperbole sur les propriétés des diametres conjugués par rapport aux asymptotes.

COROLLAIRE III.

§42. Si le triangle par l'axe est isocèle, & la section *FDH* perpendiculaire à la base du cône, le plan de la directrice sera aussi un triangle par l'axe, la directrice *IL* sera un diametre, les lignes *MI*, *NL* seront paralleles; & dans ce cas les lignes *CSO*, *GKO* le seront aussi; d'où il suit que la ligne *CS* sera le demi-axe conjugué à l'axe *DE* de la section *FDG*. C'est ce que l'on pourroit démontrer directement comme il suit. Le triangle par l'axe étant isocèle, & les lignes *EDG*, *SK* paralleles & perpendiculaires à la base *AB* du même triangle; le triangle *ESD* sera aussi isocèle; la ligne *CS* qui va du sommet au milieu de la base *DE* sera donc perpendiculaire à cette base & par conséquent parallele à la base *AB*. Donc les triangles *ECS*, *EGB* seront semblables ainsi que les triangles *DCS*, *DGA*: les premiers donnent $EG:GB::EC:CS$ & les seconds donnent aussi $GD:GA::DC:CS$, donc en multipliant par ordre $EG \times DG:GB \times GA::EC \times DC:CS^2$, mais à cause du cercle $GB \times GA = GF^2$, & les lignes *EC*, *CD* étant égales, $EC \times DC = DC^2$, donc on aura $EG \times GD:FG^2::DC^2:CS^2$: d'où il suit évidemment que les lignes *DC*, *CS* sont les demi-axes conjugués des hyperboles opposées.

COROLLAIRE IV.

543. Si l'on imagine que l'angle DGA soit égal à l'angle SBA , l'hyperbole deviendra une parabole dans ce cas, les points I , L de la directrice se confondent en un seul point en B ; les lignes MI , NL n'en font plus qu'une parallèle à la ligne FGH , qui ne pourra rencontrer le plan de la section qu'à une distance infinie de part & d'autre, d'où il suit que la parabole ne peut avoir d'asymptote, puisque les lignes qui déterminent les asymptotes ne peuvent jamais se rencontrer, lorsque l'hyperbole devient une parabole.

REMARQUE.

544. Si l'on a bien conçu tout ce qui précède, on verra que les démonstrations des sections coniques considérées dans le cône s'étendent tout d'un coup, & avec autant de facilité aux diamètres comme aux axes de chacune de ces courbes. De cette manière, l'on n'est point obligé de commencer par les axes, pour passer aux diamètres, comme on a fait dans les trois premiers livres; ce passage est toujours difficile pour les commençants, lorsque l'on examine ces courbes sur un plan, de quelque méthode que l'on se serve, analytique ou synthétique. Mais il faut bien remarquer que l'on n'est redevable de ce grand avantage qu'à la définition que nous avons donnée du cône, en le déterminant de la manière la plus générale. *Appollonius*

de *Perge* est le premier des anciens Géomètres qui ait donné cette importante définition. Il est plus que probable que ce n'étoit pas sans avoir de vûes bien générales sur les sections coniques, qu'il a préféré cette définition à toutes les autres & qu'il a mieux aimé prendre un cône scalene qu'un droit, parceque le cône droit ne peut donner que les propriétés de ces courbes par rapport à leurs axes, puisque dans ce cône, les ordonnées des sections, seront toujours perpendiculaires à leurs diametres. J'ai insisté sur cette partie d'autant plus volontiers que ceux qui ne voudroient avoir que les principales propriétés des sections coniques trouveront dans tout ce qui précède, un traité complet & très-élémentaire de chacune de ces courbes considérées par rapport à leur diametre & à leur axes. J'ai supposé qu'on étoit parfaitement au fait de ce qui s'appelle rencontre des plans, si l'on n'avoit pas cette connoissance, il seroit impossible d'entendre cette partie, où l'on suppose tous les théorèmes qui ont rapport à cela; ce qui se trouve dans les éléments d'Euclide de *M. Ozanam* ou de *M. Rivard*, est plus que suffisant pour tout ce que nous avons vû. Ceux qui seront curieux d'en voir d'avantage peuvent consulter le sixieme livre du *Traité analytique* de *M. le Marquis de l'Hôpital*, & même passer s'ils le veulent au grand *Traité in-folio* de *M. De la Hire* sur cette partie. Je me flatte qu'ils seront en état de comprendre cet ouvrage

qui a passé pour un des plus compliqués dans ce genre, & auquel ce dernier livre pourroit servir d'introduction. Nous allons examiner dans ce qui reste les corps composés d'éléments qui croissent dans la raison des quarrés des ordonnées d'une section conique quelconque; & ensuite nous dirons quelque chose des courbes qui résultent des différentes sections d'un conoïde quelconque par un plan disposé comme l'on voudra. Cette partie peut être utile à ceux qui sont obligés de rechercher les courbes qui se trouvent dans ces sections de différents solides ou corps qui se pénètrent mutuellement, comme cela arrive dans la coupe des pierres.



DE LA SOLIDITE' des corps dont les éléments croissent dans la raison des quarrés des ordonnées d'une section conique quelconque ;

ET DES COURBES que l'on peut couper dans les conoides formés par la révolution d'une section conique autour d'une axe de mouvement.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

545. Un paraboloïde quelconque $ABIDC$, (fig. 157) droit ou oblique, & dont la base est un polygone régulier ou irrégulier quelconque, est la moitié du prisme de même base & de même hauteur.

DÉMONSTRATION.

Nous concevons la paraboloïde dont il s'agit ici formé par une infinité de tranches parallèles d'une épaisseur infiniment petite, qui seront toutes semblables entr'elles, & qui auront pour lignes homologues les doubles ordonnées PQ , EF d'une parabole $EPIQF$ tracée dans un plan perpendiculaire au plan de la base du solide AID . Comme ces tranches qui sont les éléments du même corps, ont toutes une même épaisseur, elles seront entr'elles dans la raison de leurs bases, c'est-à-dire, que les éléments du paraboloïde croissent comme les

Cc

quarrés des ordonnées PQ , EF ou comme les polygones semblables construits sur ces lignes, comme des lignes homologues : donc puisque, par la propriété principale de la parabole, les quarrés des ordonnées sont comme leurs abscisses correspondantes ; les éléments seront aussi dans le même rapport & croîtront comme leurs distances au sommet de la courbe ; d'où il suit qu'un paraboloides quelconque, se doit mesurer de la même manière qu'un triangle ABC (fig. 158), puisque dans l'un & dans l'autre les éléments croissent dans le rapport des distances au sommet. Mais le triangle est la moitié du produit de sa base par sa hauteur, donc aussi le paraboloides sera la moitié du produit de sa base par sa hauteur IG , c'est-à-dire, la moitié du prisme de même base & de même hauteur. C. Q. F. D.

[†] COROLLAIRE. I.

546. Si la base est un cercle, le paraboloides deviendra un corps auquel on a donné le nom de *fuséau parabolique* ; donc le fuséau parabolique droit ou oblique est la moitié du cylindre de même base & de même hauteur.

COROLLAIRE II.

547. Donc deux paraboloïdes quelconques sont égaux, lorsqu'ils ont même base & même hauteur quelque soit la figure de leur base & la position de leur axe à l'égard de la même base.

COROLLAIRE III.

548. Il suit de cette génération d'un paraboloïde quelconque, que toutes les courbes IKA , IND qui vont du sommet I du paraboloïde aux angles de la base, sont des paraboles : car en supposant, comme cela doit être, que le plan de la parabole génératrice $EPIQF$ soit perpendiculaire au plan de la base, les points R , H où son diamètre rencontre les tranches parallèles & semblables, seront des points semblablement placés dans chaque tranche ; & si l'on mène aux angles A , K les lignes RK , HA ; ces lignes formeront des triangles semblables PRK , EHA , qui donnent $KR^2 : AH^2 :: PR^2 : EH^2$; mais $PR^2 : EH^2 :: IR : IH$; donc $KR^2 : AH^2 :: IR : IH$. d'où il suit que la courbe AKI est une parabole. Il n'est pas moins évident que les parametres de ces différentes paraboles sont entr'eux comme les quarrés des lignes AH , EH . On démontreroit de même, que si l'on coupe un paraboloïde quelconque par un plan qui passe par l'axe IH , les courbes que ce plan formera sur la surface de ce corps, seront des paraboles. Donc dans un fuseau parabolique droit ou oblique, toute courbe résultante d'un plan coupant qui passe par l'axe sera une parabole égale à la génératrice.

. L E M M E.

pour la proposition suivante.

549. Soit une ellipse $aBAb$, dont Aa , Bb sont
 Cc ij

deux diametres conjugués, si par l'extrémité A l'on mène la tangente hAH, dont les parties Ah, AH, soient chacune égales au demi-diametre CB conjugué à CA; & qu'après avoir tiré par le centre les lignes CH, Ch on mène une ordonnée quelconque DF, qui coupe la ligne CA en E; je dis que l'on aura toujours $DE^2 + DF^2 = AH^2$.

DÉMONSTRATION.

Par la propriété des diametres conjugués de l'ellipse, on a cette analogie, $DF^2 : CA^2 - CD^2 :: CB^2$ ou $AH^2 : CA^2$; donc $DF^2 = \frac{CA^2 - CD^2}{CA^2} \times AH^2 = AH^2 - \frac{CD^2 \times AH^2}{CA^2}$; & à cause des triangles semblables CAH, CDE on aura $CA^2 : AH^2 :: CD^2 : DE^2 = \frac{AH^2 \times CD^2}{CA^2}$; donc $DF^2 + DE^2 = AH^2 - \frac{CD^2 \times AH^2}{CA^2} + \frac{CD^2 \times AH^2}{CA^2} = AH^2$ ou CB^2 . C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

550. La solidité d'un ellipsoïde quelconque, est les deux tiers du prisme de même base & de même hauteur. (fig. 160)

DÉMONSTRATION.

Nous allons d'abord démontrer cette proposition sur un ellipsoïde composé d'une infinité de petits plans circulaires qui ont pour rayons les ordonnées à un diametre quelconque Aa d'une ellipse ABab; & la proposition se trouvera démontrée généralement, en appliquant ce que nous aurons dit des surfaces circulaires



à toutes les autres figures semblables régulières ou irrégulières.

D É M O N S T R A T I O N .

Imaginant l'ellipsoïde formé comme on vient de l'expliquer ; concevons ce même corps , inscrit a un cylindre de même base & de même hauteur ; il est visible que le rayon *AH* du cercle qui sert de base à ce cylindre, sera le demi - diamètre *CB* de l'ellipse. Il n'est pas moins évident que le demi - ellipsoïde *BAb* est égal au cylindre *BHLhb* moins l'écuelle *AHBF Afbh*. Donc tout se réduit à trouver la solidité de cette écuelle, & à prouver qu'elle est le tiers du cylindre de même base & de même hauteur ; ou , ce qui est la même chose, qu'elle est égale au cône oblique *HCh* qui a même base & même hauteur. Cela posé, par le lemme précédent , on a $DF^2 + DE^2 = AH^2$ ou DG^2 : donc $DE^2 = DG^2 - DF^2$; & si au lieu des quarrés faits sur *DE*, *DF* & *DH*, on prend les cercles dont ces lignes seroient les rayons ; on aura le cercle de *DE* égal au cercle de *DG*, moins le cercle de *DF* ; c'est - à - dire, que l'élément du cône *hCH* est égal à la couronne faite sur *FG* ou à l'élément correspondant de l'écuelle ellipsoïde ; d'ailleurs le nombre des éléments est le même pour l'un & pour l'autre, étant mesuré par la même perpendiculaire. Donc l'écuelle ellipsoïde est le tiers du cylindre de même base & de même

hauteur ; donc l'ellipsoïde est les deux tiers du même cylindre. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

§ 551. Puisque les cylindres de même base & de même hauteur, sont égaux ; il s'ensuit que les ellipsoïdes formés sur différentes ellipses, qui auront un diamètre comme Bb égal, & dont les diamètres comme aA , peuvent être compris entre parallèles, à cause de leur différentes inclinaisons, sont égaux entr'eux, & à l'ellipsoïde formé par la révolution d'une demi-ellipse, dont les axes seroient Bb & la perpendiculaire Kk , autour du même axe Kk .

COROLLAIRE II.

§ 552. Si l'on applique notre démonstration à des figures quelconques, au lieu de prendre des cercles, on verra aisément qu'un ellipsoïde sera toujours les $\frac{2}{3}$ du prisme circonscrit de même base & de même hauteur quelque soit la figure de cette base.

COROLLAIRE III.

§ 553. Si les diamètres conjugués deviennent égaux & à angles droits, le solide deviendra une sphère, donc la sphère est les deux tiers du cylindre de même base & de même hauteur : comme il est démontré dans tous les éléments.

COROLLAIRE IV.

§ 554. Il suit encore de-là que l'on pourra

toujours trouver la solidité d'un segment, ou d'un secteur ellipsoïde quelconque, sans avoir recours aux segments ou secteurs sphériques correspondans d'une sphère qui auroit pour diamètre la perpendiculaire Kk . Par exemple, si je veux toiser le segment ellipsoïde FAs , je vois que tout se réduit à retrancher la solidité du cône tronqué $EHhe$, du cylindre $G Hhg$ de même base & de même hauteur ; car ce cône tronqué est toujours égal à la portion de l'ecuelle ellipsoïde de même hauteur. Comme les calculs que l'on seroit obligé de faire pour toiser les segments ou secteurs d'ellipsoïde pourroient devenir un peu compliqués en nous servant de la synthèse, & que d'ailleurs les propositions que nous venons de démontrer sont assez évidentes par elles-mêmes, nous nous servirons de la méthode analytique dans les problèmes suivans, afin de donner à nos solutions toute la généralité dont elles sont susceptibles. PROPOSITION III.

PROBLÈME I.

555. Trouver la solidité d'un segment de sphéroïde elliptique, dont les éléments croissent comme les cercles faits sur les ordonnées DF au diamètre CA . (fig. 160)

SOLUTION.

Du centre C soit abaissée la ligne CK perpendiculaire à la tangente AH ; nous ferons $CK = a$, AH ou $CB = b$, les indéterminées $CP = x$, $DF = y$. Et comme nous avons

besoin des cercles décrits sur les rayons AH ou DE &c. nous supposerons :: $m : n$, le rapport du rayon à la demi-circonférence. Cela posé, nous avons fait voir dans l'article précédent que la solidité du segment ellipsoïde est égale à celle du cylindre correspondant $GHhg$, dont on auroit ôté celle du cône tronqué, qui est égal en solidité à un cône qui auroit une base égale à la somme des bases inférieures & supérieures, plus une base moyenne géométrique entre les deux dernières; laquelle setrouve en multipliant le contour de l'un par le rayon de l'autre. Je commence donc par chercher la solidité de ce corps; pour cela, à cause des triangles semblables CDE , CAH ; ou CPE , CKH , on aura $CK : CP :: AH : DE$ & analytiquement $a : x :: b : \frac{bx}{a} = DE$; donc pour avoir la demi-circonférence du cercle qui a pour rayon DE & de celui qui a pour rayon AH on fera $m : n :: \frac{bx}{a} : \frac{nhx}{am}$ & encore $m : n :: b : \frac{bn}{m}$; en multipliant ces demi-circonférences par les rayons correspondants, on aura les surfaces des cercles décrits avec les rayons AH & DE , dont l'une sera $\frac{n^2 b^2 x x}{m^2 a^2}$, & l'autre $\frac{a^2 b^2}{m^2}$ ou $\frac{na^2 b^2}{ma^2}$. La surface du cercle moyen géométrique entre les deux sera $\frac{n b h x}{a m}$ ou $\frac{na^2 b x}{m a^2}$. Donc le cône tronqué sera égal à $\frac{n b b x x + n a^2 b^2 + n a b^2 x}{m a^2} \times \frac{1}{3} a - \frac{1}{3} x$, puisque la ligne PK est évidemment $a - x$. La solidité du cylindre correspondant sera $\frac{n h^2}{m} \times a - x$, ou en réduisant à la dénomination $m a^2$, &

mettant $\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x$, $\frac{3n+2b^2}{m a^2} \times \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x$: ainsi retranchant le solide du cône tronqué du cylindre correspondant, on aura pour la solidité du segment ellipsoïde que nous désignerons par Faf , $Faf = \frac{3n a^2 b^2 - n^2 x^2 - n a^2 b^2 - n a b^2 x}{m a^2} \times \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x$, ou en réduisant

$$\frac{2n a^2 b^2 - n b^2 x^2 - n a^2 x}{m a^2} \times \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x.$$

ou $\frac{n b^2}{m a^2} \times 2a^2 - x^2 - ax \times \frac{1}{3}x$. D'où l'on peut déduire une règle générale pour trouver la solidité de tous les segments ellipsoïdes imaginables formés sur un ellipsoïde droit ou oblique. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

§56. Si l'on fait attention à l'expression que nous venons de trouver on verra que l'opération qu'il faudra faire pour toiser le solide d'un segment d'ellipsoïde quelconque se réduit à ce qui suit. D'abord on ajoutera le cercle fait sur le rayon CP représenté par $\frac{a^2}{m}$ au cercle moyen géométrique entre celui qui a pour rayon CK, & celui qui a pour rayon CP, lequel est représenté par $\frac{ax}{m}$; 2°. On ôtera cette somme du double du cercle fait sur CK représenté par $\frac{2n a^2}{m}$. 3°. On multipliera cette différence par le tiers de la perpendiculaire CK moins celui de la fleche PK; & enfin 4°. On multipliera ce nouveau produit par le rapport du quarré du diamètre CB ou AH au quarré de la perpendiculaire CK. Tout ce raisonnement est déduit immédiatement de la formule $Faf = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{2n a^2 - n x^2 - n a^2 - n a x}{m} \times \frac{a-x}{3}$.

COROLLAIRE II.

§57. Dans la sphère, la perpendiculaire CK

& le diamètre AH ou CB sont égaux & à angles droits : donc la solidité d'un segment sphérique quelconque peut être représentée par

$\frac{2na^3 - nxx - nax}{m} \times \frac{a-x}{3}$; car le rapport $\frac{1^2}{a^2}$ devient l'unité, & par conséquent doit disparaître.

COROLLAIRE III.

§ 58. Si dans la formule générale précédente $\frac{nb^2}{ma^2} \times 2a^2 - x^2 - ax \times \frac{a-x}{3}$, on fait $x = 0$, on aura par la réduction des termes où x se trouve $\frac{nb^2}{ma^2} \times 2a^2 \times \frac{a}{3} = \frac{2}{3} \frac{a^2b^2}{m}$, c'est-à-dire, que la solidité du demi-ellipsoïde, est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit de même base & de même hauteur.

PROPOSITION IV.

PROBLÈME II.

§ 59. Trouver la solidité d'un secteur de sphéroïde elliptique (fig. 160).

SOLUTION.

On cherchera d'abord le segment FAf par le problème précédent & ensuite on ajoutera à cette solidité celle du cône CFf dont la hauteur est CP , x ; & qui a pour base le cercle dont le rayon est l'ordonnée DE au diamètre CA . Seulement, on peut remarquer qu'en déterminant le carré de cette ordonnée DE , il n'est pas nécessaire de se servir du rectangle des abscisses AD , aD ; mais que l'on peut leur substituer

quer les abscisses KP , kP en sorte qu'ayant toujours conservé les mêmes dénominations, on aura $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$ ou $\frac{aabb - bbxx}{aa}$, si l'on multiplie cette valeur de yy par $\frac{a}{a}$, on aura la solidité du cône qu'il faut a'ôûter au segment ellipsoïde pour avoir le secteur demandé. C. Q. F. T.

SCHOLIE.

§ 60. Si l'on compare l'ellipsoïde à sa sphère décrite sur la ligne Kk comme diamètre, on trouvera que l'ellipsoïde est à cette sphère comme le quarré de CK au quarré de CB . Car, par la seconde proposition (art. 550), l'ellipsoïde est les deux tiers du cylindre Nh & la sphère seroit aussi les deux tiers du cylindre dont la hauteur seroit Kk & dont la base auroit la même ligne pour diamètre. Donc ces cylindres sont entr'eux comme les bases puisqu'ils ont une même hauteur; donc ils sont comme les cercles faits sur CK & CB ou comme les quarrés de ces lignes. Si au contraire on compare l'ellipsoïde à la sphère décrite sur le diamètre Bb ; cette sphere sera les deux tiers du cylindre fait sur CB , comme rayon, & l'ellipsoïde est les deux tiers du cylindre sur la même base & dont la hauteur est CK . Donc ces cylindres, ou la sphere & l'ellipsoïde, seront entr'eux comme leurs hauteurs c'est-à-dire comme CK à CB . Il suit encore de-la que l'on pourroit concevoir un ellipsoïde quelconque droit ou oblique, comme provenant d'une sphere dont on auroit allongé ou

accourci toutes les ordonnées proportionnellement dans le rapport de CB à CK ; il faut entendre la même chose des parties correspondantes de ces deux corps , c'est à - dire des segments & secteurs ellipsoïdes comparés aux segments ou secteurs sphériques correspondants dont les éléments suivent le même rapport.

PROPOSITION V.

THÉOREME.

561. *La solidité d'un hyperboloïde quelconque NIEKO (fig. 161.) est égale à celle d'un cône tronqué ACDB, moins un cylindre de même hauteur, & dont la base est un cercle qui a pour rayon le demi-diamètre ED conjugué au demi diamètre SE.*

DÉMONSTRATION.

Par un point P quelconque du diamètre SPQ soit menée une ordonnée $HIPKL$ terminée aux asymptotes CS , DS que l'on suppose accompagner l'hyperbole $NIEKO$. On aura par la propriété principale des diamètres $HP^2 - PI^2$ ou $HI \times IL = CE^2$, & si l'on substitue aux quarrés HP^2 , PI^2 & CE^2 les cercles faits sur les mêmes lignes comme rayons ; on aura le cercle de PH moins le cercle de PI égal au cercle de CE ; c'est-à-dire la couronne $IHR LK$ égale à la base du cylindre. Donc si l'on suppose le cylindre composé d'une infinité de petits solides parallèles qui ont une épaisseur infini-

ment petite & de même l'écuelle hyperbolique composée d'une infinité de couronnes de même épaisseur ; les éléments du cylindre seront toujours égaux aux éléments correspondants de l'écuelle ellipsoïde. Donc la somme des uns sera égale à la somme des autres ; c'est-à-dire , que le cylindre est égale à l'écuelle ellipsoïde de même base & de même hauteur. Or il est évident que l'hyperboloïde est la différence de cône tronqué *ACDB* à l'écuelle *CANEOBD*. Donc l'hyperboloïde sera aussi égale au cône tronqué moins le cylindre de même base & de même hauteur. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

562. Il faut entendre la même chose de tout autre corps hyperbolique dont les éléments seroient des figures semblables régulières qui croîtroient comme les quarrés des ordonnées de l'hyperbole *NIEKO* : alors au lieu d'un cône on auroit une pyramide ; au lieu du cône tronqué on auroit une pyramide tronquée ; & enfin , au lieu du cylindre on auroit un prisme de même hauteur & dont la base seroit le polygone fait sur la ligne *CD* , comme ligne homologue aux figures semblables qui forment les éléments de l'hyperboloïde proposé ; soit que les lignes *CE* , *ES* soient les axes de l'hyperbole génératrice , ou seulement des diamètres.

COROLLAIRE II.

563. Si l'on fait attention à ce que nous

venons de démontrer sur les propriétés de l'hyperboloïde, & ce que nous avons expliqué ci-devant sur la solidité d'un ellipsoïde quelconque, on verra que la même formule peut donner les solidités de ces deux corps, en changeant seulement les lignes ; car pour avoir une portion d'ellipsoïde, il faut retrancher le cône tronqué de même hauteur, & dont la base est un cercle décrit avec le diamètre AH , (fig. 160) il faut dis-je, retrancher ce cône du cylindre de même base & de même hauteur, au lieu que dans l'hyperboloïde ; c'est le cylindre qu'il faut ôter du cône tronqué.

COROLLAIRE III.

564. Il n'est pas moins évident que l'on toiserà de la même manière, la solidité d'une portion d'hyperboloïde renfermée entre deux plans parallèles, tels que $HRLH$ & $ATBA$; en ôtant du cône tronqué le cylindre de même hauteur & dont la base est toujours le cercle fait sur le demi-diamètre ED .

COROLLAIRE IV.

565. Donc on pourra toujours déterminer une portion d'hyperboloïde égale à la solidité d'un ellipsoïde proposé.

DÉFINITIONS.

I.

566. Nous appellerons du nom *Cortoïde*, tout solide dont les éléments sont composés des

cercles faits sur les ordonnées d'une section conique quelconque.

II.

§ 67. Nous appellerons *Diametre* du conoïde une ligne menée du sommet de la parabole génératrice au centre de la base, laquelle est aussi un diametre de cette parabole.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

§ 68. Si l'on coupe un conoïde quelconque par un plan de quelque maniere qu'il soit disposé, il en résultera toujours une section conique de même nature que celles que nous avons examinées dans les livres précédents.

Cette proposition peut avoir deux cas dans un conoïde quelconque ; car le plan coupant coupant est placé de maniere qu'il soit parallèle au diametre du conoïde, ou bien il est disposé de maniere qu'il coupé ce même diametre.

DEMONSTRATION POUR LE PARABOLOÏDE.

I. Cas.

§ 69. Soit un paraboloïde *SLAKB* (fig. 162) composé d'une infinité de plans circulaires, qui croissent dans la raison des quarrés des ordonnées *AC, NG* de la parabole génératrice *ANSB*. Nous avons déjà vû que tout plan qui coupera ce corps en passant par le diametre *CS* donnera une parabole *LMSIK*, qui aura le même

parametre que la premiere *AESB* (art. §48). Imaginons dans le cercle de la base une ligne *RT* parallele au diametre *ACB*, & une ligne au diametre *LCDK*, & une ligne ou diametre *LCDK* perpendiculaire à la ligne *RT*. Cette ligne divise nécessairement *KT* en deux parties égales. Présentement par le diametre *CS* & la ligne *LCK*, imaginons un plan *LSIK*, & par la ligne *RT* un autre plan *RET* parallele au plan *ASB*, qui rencontre le premier *LSK* dans la ligne *ED*. Si l'on conçoit encore un nouveau plan *MNIO* parallele à la base, ce plan sera, par la définition du conoïde parabolique, un cercle décrit du rayon *NG*. Puisque les plans *MNI*, *LAK* sont paralleles, les lignes *GI*, *CK* qui représentent les communes sections de de ces plans avec le plan *LSK* seront paralleles; & de même les lignes *PQ*, *RT* qui sont les intersections des mêmes plans paralleles avec le plan *RET*, seront aussi paralleles; de plus, puisque *CK* est un diametre du cercle de la base perpendiculaire par hypothese à *RT*; *GI* sera aussi un diametre du cercle *MNPI* & partant divisera *PQ* en deux également en *H*; donc *EHD* commune section du plan *SEK* avec le plan *RET*, sera un diametre de la courbe *RET* reste à faire voir que cette courbe est une parabole. A cause des cercles *LARK*, *NMPI*, on a $RD^2 = LD \times DR$, & $PH^2 = MH \times HI$, donc on aura cette proportion $RD^2 : PH^2 :: LD \times DK : MH \times HI$. Mais la courbe *LSK* étant une parabole

considérées dans le Cône. Livre V. 417
 parabole dont les lignes CS , DE sont des diamètres & les lignes EK , MI des doubles ordonnées parallèles entr'elles, on aura par l'article 87 $LD \times DK : MH \times HI :: ED : EH$; donc aussi $RD^2 : PH^2 :: ED : EH$; donc la courbe RET est une parabole. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

570. Il suit évidemment de cette démonstration que la parabole RET a le même paramètre du diamètre ED que celui du diamètre CS de la parabole génératrice. Car on a $PH^2 = MH \times HI = GI^2 - GH^2$ ou $GI^2 - EF^2$, en supposant dans le plan CSK l'ordonnée EF parallèle au diamètre CK . Donc si l'on appelle P le paramètre du diamètre CS , on aura à cause des ordonnées EF , GI ; $GI^2 - EF^2 = (GS - FS) \times P = FG$ ou $EH \times P$: donc $PH^2 = EH \times P$; c'est-à-dire que le paramètre du diamètre ED est égal à celui du diamètre CS .

COROLLAIRE II.

571. Si l'on transporte les ordonnées PH ; RD sur les ordonnées correspondantes NG , AC dans la parabole ANS , en prenant les lignes $pG = PH$ & $rC = RD$; il en résultera une nouvelle parabole entièrement égale à la première EPR qui aura conséquemment le même paramètre que la parabole ANS : on aura donc pour l'une $NG^2 = GS \times P$, & pour la seconde $pG^2 = FG \times P$; donc $NG^2 - pG^2$ ou $Np \times pO = GS \times P - GF \times P$ ou $FS \times P$, qu'enfin EF^2 , puisque cette ligne est ordonnée à la parabole SEK : donc les rectangles $Np \times pO$, $Ar \times rB$ sont tou-

jours égaux entr'eux & au quarré de la constante EF ; donc puisque les ordonnées RD , PH vont toujours en augmentant, les parties Np , Ar doivent toujours diminuer, sans cependant pouvoir jamais être nulles: donc les paraboles SNA , Fpr s'approchent toujours les unes des autres, sans jamais pouvoir se toucher. Donc elles sont asymptotes les unes des autres.

Ce corollaire est une démonstration complète & directe de cette propriété de la parabole que nous avons déduite des propriétés des hyperboles au numero 421. On voit de plus ici que ces courbes ont les unes par rapport aux autres, les propriétés de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes; & qu'elles pourroient se décrire de la même manière.

II Cas.

§72. Si l'on coupe un conoïde parabolique de manière que le plan coupant rencontre le diamètre du conoïde dans quelque point; la courbe qui en résultera sera encore une section conique.

DÉMONSTRATION DU II CAS.

Soit un conoïde parabolique quelconque ASB (fig. 163) coupé par un plan DKE qui rencontre le diamètre CS du conoïde au point R . Par ce même diamètre faisons passer un plan ASB , qui coupe la courbe DKE dans une ligne DE . Imaginons encore deux plans parallèles à la base ACB , dont les communes sections avec le plan ASB soient représentés par les lignes MN , OP ; & qui rencontreront le plan DKE dans les lignes KL , IH qui

Seront nécessairement paralleles entr'elles & en même temps des ordonnées des cercles *MKNL*, *OHPI*. Il est évident que les lignes *MN*, *OP*, *DE* sont des sécantes intérieures à la parabole *ASB*. Nous avons démontré (art. 82) qu'en nommant *P* & *p* les parametres des diametres qui divisent en deux parties égales les sécantes *MN*, *OP* & la troisième *DE*, on auroit $MF \times FN : DF \times FE :: P : p$ & $OG \times GP : DG \times GE :: P : p$; donc on aura $MF \times FN : DF \times FE :: OG \times GP : DG \times GE$. Mais à cause des cercles *MKN*, *OHP* on a $MF \times FN = KF \times FL$, & $OG \times GP = GH \times GI$: donc en mettant ces rectangles au lieu des précédents, on aura $KF \times FL : DF \times FE :: GH \times GI : DG \times GE$. Donc, par les propriétés des sécantes de l'ellipse, cette courbe *DKEI* sera une ellipse, puisque les rectangles de deux lignes paralleles entr'elles, sont entr'eux comme les rectangles des abscisses correspondantes.

C. Q. F. D.

DÉMONSTRATION.

POUR L'ELLIPTOÏDE. I. CAS.

573. Soit un ellipsoïde *ANBO* (fig. 164) composé d'une infinité d'éléments circulaires qui croissent comme les cercles formés sur les ordonnées *RO*, *MS* du diametre *AB* de l'ellipse génératrice. Si l'on coupe ce solide par un plan *EHIDKL* parallele au diametre *AB*, je dis que la courbe qui résultera de cette section, sera une section conique.

DÉMONSTRATION.

Par le diametre *AB* de l'ellipsoïde, concevons un plan *ADEB*, qui coupe le premier

Dd ij

plan coupant dans une ligne *DE* laquelle est nécessairement parallèle au diamètre *AB*; la courbe qui naîtra de la section de l'ellipsoïde par le plan qui passe par le diamètre *AB*, sera une ellipse comme il est évident par la génération de ce corps. Cela posé, par deux points quelconques *G*, *F* de la ligne *DE* dans le plan *DANB* soient menées les ordonnées *OGRP*, *MFSN* au diamètre *AB*, & par ces lignes imaginons encore deux plans parallèles entr'eux, & disposés de telle manière à l'égard du diamètre *AB*, que les sections coniques *OIPK*, *MHNL* soient des cercles ou des éléments de l'ellipsoïde: ces cercles rencontreront nécessairement le premier plan coupant *ELDI* en deux lignes *IK*, *LH* qui seront parallèles entr'elles. Cela posé, il est visible que les lignes *OP*, *MN* & la ligne *DE* sont des sécantes intérieures de l'ellipse *ODANB* dont les deux premières sont parallèles aux ordonnées du diamètre *AB* & la troisième est parallèle au diamètre *AB* lui-même; on aura donc (art. 212) $OG \times GP : MF \times FN :: EG \times GD : EF \times FD$; mais à cause des cercles *OKP*, *MLN* on a $OG \times GP = GK \times GI$, & $MF \times FN = LF \times FH$; donc en mettant ces rectangles à la place des précédents, on aura $GK \times GI : LF \times FH :: EG \times GD : EF \times FD$. D'où il suit que la courbe faite par le plan coupant *DHE* est une ellipse. C. Q. F. D.

II Cas.

574. Si le plan coupant *DHE* rencontroit

le diamètre en quelque point, on démontreroit précisément de la même manière que la courbe qui en résulteroit, est une ellipse; puisque dans cette hypothèse les rectangles de deux sécantes quelconques parallèles entr'elles, seroient entr'eux comme les rectangles des parties d'une même droite coupée par les deux premières. Donc on ne peut couper que des ellipses dans une ellipsoïde quelconque.

DÉMONSTRATION.

POUR L'HYPERBOLOÏDE. I. CAS.

575. Si l'on coupe un hyperboloïde par un plan parallèle au diamètre AB (fig. 163) la courbe qui en résultera sera une hyperbole.

DÉMONSTRATION.

Nous imaginerons toujours l'hyperboloïde formé comme les autres conoïdes d'une infinité de cercles qui ont pour rayon les ordonnées de l'hyperbole génératrice. Par le diamètre AB je suppose qu'on ait fait passer un plan qui coupe le premier plan coupant $HDKL$ dans une ligne DF , qu'il faut concevoir prolongée en E , jusqu'à la rencontre de l'hyperboloïde opposé. La courbe $MOAPN$ sera évidemment une hyperbole. Je suppose encore deux plans élémentaires OIP , MHN parallèles entr'eux. Cela posé, il est évident que les lignes EDF , OP , MN sont des sécantes de l'hyperbole $MDAN$; ainsi l'on aura $OG \times GP : MF \times FN :: EG \times GD : EF \times FD$; mais à cause des cercles OIP , MHN on a $IG \times GK = OG \times GP$, & $HE \times FL = MF \times FN$; donc dans le plan

coupant HDL on aura $IG \times GK : HF \times FL :: EG \times GD : EF \times FD$; d'où il suit évidemment que la courbe est une hyperbole. C. Q. F. D.

II Cas.

576, Si le plan coupe le diamètre de l'hyperboloïde, la courbe ne sera plus une hyperbole mais une ellipse. Ce qui se démontreroit avec la même facilité par le moyen des sécantes intérieures de l'hyperbole. On peut donc conclure en général que de quelque manière que l'on coupe un conoïde, il en résultera toujours une section conique de même genre que celles que nous avons examinées dans les trois premiers livres. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. I.

577. Dans le paraboloïde & dans l'hyperboloïde, on pourra toujours trouver deux sortes de courbes; sçavoir une du genre elliptique & une du même genre que la courbe génératrice du conoïde proposé: au lieu que dans l'ellipsoïde, on ne peut couper que des courbes du genre elliptique. COROLLAIRE II.

578. On remarquera encore, que toutes les fois que le plan coupant est parallèle au diamètre du conoïde, chaque courbe qui résulte de la section est semblable à celle que l'on détermineroit par un plan qui seroit, mené par le diamètre conoïde parallèlement au premier plan coupant. Ainsi dans le paraboloïde & l'hyperboloïde toutes ces courbes seront asymptotes les unes par rapport aux autres.

Fin du cinquième livre & des sections coniques.

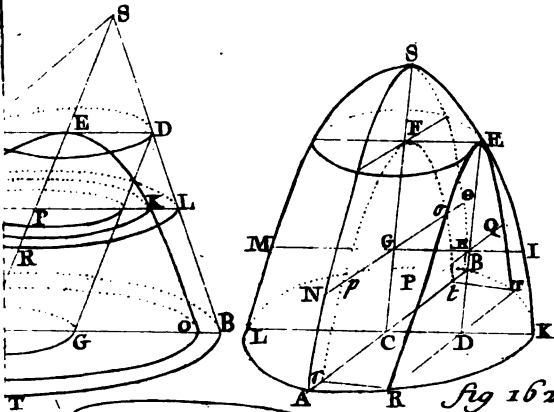
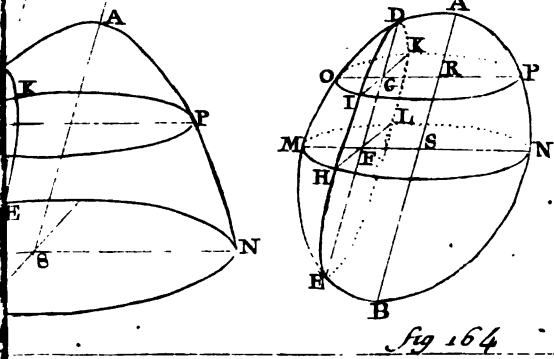


fig 163.





SUPPLEMENT

AUX SECTIONS CONIQUES.

COMME les démonstrations que nous avons données sur les propriétés des sécantes intérieures & extérieures quoique générales, pourroient cependant paroître un peu difficiles ; & que d'ailleurs en travaillant à cet ouvrage, j'en ai trouvé une qui m'a paru plus simple que toutes celles que je connois : je crois qu'on la verra ici avec d'autant plus de plaisir qu'elle devient un corollaire très-naturel d'une propriété commune à toutes les sections coniques que je n'ai point vue dans les auteurs les plus connus. Je l'ai déjà fait entrevoir en traitant les propriétés des hyperboles asymptotes ; & quoique ce que j'en ai dit soit plus que suffisant pour des personnes un peu avancées, je me suis néanmoins déterminé à la donner encore ici, soit pour ne rien laisser à deviner aux commençants, soit pour la présenter dans toute la généralité qui lui convient, & enfin pour faire quelques observations que je n'aurois pas pû faire alors sans m'écarter de mon sujet.

THÉORÈME GÉNÉRAL.

pour toutes les sections coniques.

§79. Si par un point *B* pris au-dedans d'une section

conique quelconque (fig. 166, 167, 168 & 169) on fait passer sur le même plan une courbe semblable à la première; & qu'ensuite, ayant mené par le même point la tangente BD à la courbe décrite, & terminée au périmètre de l'autre; on tire par tant de points O , o que l'on voudra des droites MON , mon parallèles à cette tangente & terminées de part & d'autre au contour de la première courbe; je dis que l'on aura toujours $MO \times ON = BD^2$.

DÉMONSTRATION.

pour la Parabole. (fig. 166)

Toutes les paraboles étant des figures semblables, celles qui sont décrites avec le même paramètre le sont aussi: cela posé, ayant fait passer par le point B un diamètre ABP & mené à ce diamètre l'ordonnée BD qui déterminera l'angle des ordonnées, puisqu'elle est supposée tangente en B ; supposant de plus que P soit le paramètre de la parabole proposée & de celle à décrire; par un point quelconque P du diamètre ABP je mène l'ordonnée OP que je prolonge de part & d'autre, jusqu'à ce qu'elle rencontre la première parabole aux points M, N ; il est évident que cette ligne est une double ordonnée du diamètre ABP pour les deux paraboles; donc on aura pour la première $MP^2 = (AB + BP) \times P$, & pour la seconde, $PO^2 = BP \times P$; donc $MP^2 - PO^2$ ou $MO \times ON = (AB + BP) \times P - BP \times P$, ou en réduisant $MO \times ON = AB \times P = BD^2$. C. Q. F. D,

R E M A R Q U E.

§80. Si les deux paraboles ne sont pas décrites avec le même parametre, on ne trouveroit pas précisément le même rapport; mais les rectangles $MO \times ON$ seroient toujours dans un rapport constant, comme il est aisé de s'en convaincre.

D É M O N S T R A T I O N.

pour l'Ellipse.

§81. Par le centre C & le point B (fig. 167) ayant mené un diamètre $ABCba$, avec son ordonnée BD qui détermine, comme dans le cas précédent, l'angle des ordonnées de la courbe à décrire avec le diamètre Bb ; & supposant une droite MPN qui coupe les deux ellipses & qui est parallèle à BD , on aura pour la première $MP^2 : CA^2 - CP^2 :: CF^2 : CA^2$; & pour la seconde $PO^2 : CB^2 - CP^2 :: CG^2 : CB^2$; mais à cause que ces courbes sont supposées semblables, les diametres conjugués correspondants sont proportionels; donc $CF^2 : CA^2 :: CG^2 : CB^2$; donc $MP^2 : PO^2 :: CA^2 - CP^2 : CB^2 - CP^2$; donc *dividendo* $MP^2 - PO^2 : MP^2 :: CA^2 - CP^2 - CB^2 + CP^2 : CB^2 - CP^2$, ce qui se réduit à $MO \times ON : MP^2 :: CA^2 - CB^2 : CB^2 - CP^2$; mais par la propriété des ordonnées BD , PM on a cette proportion $BD^2 : PM^2 :: CA^2 - CB^2 : CB^2 - CP^2$; donc on aura encore $MO \times ON : MP^2 :: BD^2 : MP^2$; donc, puisque

les conséquents sont égaux , les antécédents le seront aussi & donneront $MO \times ON = BD^2$.
C. Q. F. D.

REMARQUE.

§ 82. Il est aisé de voir que la même propriété doit aussi se trouver dans le cercle. La démonstration n'en devient que plus simple par l'égalité constante des diamètres conjugués. Voyez la figure 168.

DÉMONSTRATION.

pour l'Hyperbole.

183. Par le point donné B (fig. 169) & le centre C de l'hyperbole MAN ayant mené le diamètre CAB avec son ordonnée BD , qui détermine toujours l'angle des ordonnées de l'hyperbole à décrire avec le même diamètre ; je mene à cette ligne prolongée jusqu'à l'asymptote en G , la parallèle AF aussi terminée à l'asymptote. Il est évident que les lignes $CA, CB; AF, BG$ sont les diamètres conjugués correspondants des hyperboles MAN, OBQ . Cela posé, concevant toujours une droite MN terminée de part & d'autre au périmètre de la première hyperbole, & parallèle à la tangente BD , on aura cette proportion pour l'ordonnée MP , $MP^2 : CP^2 - CA^2 :: CA^2 : AF^2$; & pour l'ordonnée PO , $PO^2 : CP^2 - CB^2 :: CB^2 : BG^2$; donc puisque les hyperboles sont semblables (*hyp.*) leurs diamètres correspondants sont proportionels. On

aura donc, $CA^2 : CB^2 :: AF^2 : BG^2$; donc
 $MP^2 : PO^2 :: CP^2 - CA^2 : CP^2 - CB^2$. Donc
dividendo $MP^2 - PO^2 : MP^2 :: CP^2 - CA^2 -$
 $CP^2 + CB^2 : CP^2 - CA^2$, ou en réduisant
 $MO \times ON : PM^2 :: CB^2 - CA^2 : CP^2 - CA^2$;
 mais à cause des ordonnées BD, PM on a
 $CB^2 - CA^2 : CP^2 - CA^2 :: BD^2 : PM^2$; donc
 $MO \times ON : PM^2 :: BD^2 : PM^2$; donc $MO \times ON =$
 BD^2 . C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

§84. On démontreroit de la même manière que le rectangle $MQ \times QN$ est toujours égal au carré de la constante BL ou de son égale BD (fig. 166) & de même dans toutes les autres figures. Donc
 1°. les parties MO, NQ comprises entre les deux courbes sur une même droite sont toujours égales entr'elles. 2°. Puisque les ordonnées PO, po vont toujours en augmentant en s'éloignant du sommet de la courbe, il faut que les parties MO, QN ou mo, qn diminuent continuellement ; d'où il suit que ces courbes sont asymptotes les unes par rapport aux autres. C'est ce que nous avons déjà démontré pour la parabole & pour l'hyperbole. Dans l'ellipse (fig. 167) la plus petite distance des deux courbes, mesurée sur des parallèles à BD est FG différence des deux demi-diamètres CF, CG conjugués aux deux demi-diamètres CA, CB .

COROLLAIRE II.

§85. Il suit encore de-là que si deux lignes droites

se coupent en quelque point au-dedans ou au-dehors d'une section conique quelconque, les rectangles des segments de ces lignes seront toujours dans un rapport constant. Nous avons déjà démontré cette proposition sur l'hyperbole, nous allons en faire la démonstration sur la parabole & sur l'ellipse, afin de faire voir la facilité avec laquelle cette proposition qui est la plus générale des sections coniques, se déduit de la précédente.

D É M O N S T R A T I O N .

pour la Parabole.

§ 86. Soient deux droites AB , MN (fig. 170) qui se coupent en un point O . Par ce point je conçois une parabole ODF semblable à la première & décrite avec le même paramètre. Par le point I milieu de la sécante AB , je mene le diamètre IDC qui coupe cette nouvelle parabole au point D , par lequel je mene la tangente DE . Pareillement par le point L milieu de la sécante MN , je mene le diamètre LFK qui coupe la nouvelle parabole au point F par lequel je mene la tangente FG . Cela posé, par la proposition générale que nous venons de démontrer, on aura $AO \times OB = DE^2$, & de même $MO \times ON = FG^2$. Mais les droites DE , FG étant des ordonnées aux diamètres CD , KF dont nous désignerons les paramètres par P , p ; on aura $DE^2 = CD \times P$ & $FG^2 = KF \times p$. Donc $AO \times OB : MO \times ON :: CD \times P : KF \times p$. De plus, si l'on fait attention que les lignes ou diamètres CI , KL sont parallèles & infinis & que les rectangles de ces diamètres par

Les lignes finies CD , KF doivent être égaux entr'eux, il s'en suit que les lignes CD , KF sont aussi égales. Donc $AO \times OB : MO \times ON :: P : p$. C'est ce qui a été déjà démontré directement sur la parabole. *Livre premier. art. 18.*

COROLLAIRE.

§86. Il suit de cette démonstration que les parties des diametres comprises entre deux paraboles asymptotes sont toutes égales entr'elles. Il suit encore de-là que la demi-couronne parabolique $DOSTGCKNXZVD$ est égale au rectangle $TSZX$; car les éléments de cette couronne & du rectangle sont tous égaux entr'eux, & la ligne TX en mesure le nombre de part & d'autre.

DÉMONSTRATION.

pour l'Ellipse.

§87. Par le point O où se coupent les sécantes MN , concevons une ellipse DOG (*fig. 171*) semblable à la première. Par le point I milieu de la sécante AB & le centre C , soit mené le diametre CIV , & son demi-conjugué CE parallèle à AB . De même par le point K milieu de la sécante MN & le centre C soit mené le diametre RCS & son demi-conjugué CL . Aux points D , G où ces diametres coupent l'ellipse intérieure, soient menées les tangentes à cette courbe DF parallèle à MN & GH parallèle à AB . Cela posé, on a par la proposition générale $AO \times OB = GH^2$ & $MO \times ON = DF^2$. Mais les tangentes GH , DF sont aussi des ordonnées aux diametres TV , RS ; donc on aura pour la première ordonnée $GH^2 : CT^2 :: CG^2 : CE^2$, CT^2 ,

& pour la seconde $DF^2:CR^2-CD^2::CL^2:CR^2$.
 Mais puisque ces courbes sont semblables, les
 diamètres CT , CR & leurs homologues CG , CD
 sont proportionels. Donc $CT^2:CR^2::CG^2:CD^2$,
 donc $CT^2-CG^2:CT^2::CR^2-CD^2:CR^2$. Donc
 $GH^2:DF^2::CE^2:CL^2$; donc enfin $AO \times OB:MO \times$
 $ON:CE^2:CL^2$. C. Q. F. D.

S C H O L I E.

§ 88. On démontreroit de même les propriétés des
 sécantes extérieures dans toutes ces courbes; en
 imaginant une courbe semblable à la proposée,
 & qui passeroit par le point où les sécantes exté-
 rieures se rencontreroient. Quand à la descrip-
 tion de ces courbes semblables qui passent par
 un point donné, elle se déduit encore immédia-
 tement de cette propriété générale. Pour cela
 il n'y a qu'à mener par le point donné sur le
 plan de la courbe des droites $BPpb$, $CPpc$,
 $APpa$, $DPpd$ (fig. 172, 173 & 174) ter-
 minées de part & d'autre à la courbe donnée;
 & si l'on prend les parties $ap = AP$, $pb = PB$,
 $pd = PD$ &c. chacune à sa correspondante,
 tous les points p déterminés par cette opération
 seront à la courbe demandée. Tout ceci ne
 souffre aucune difficulté. Il n'est pas moins évi-
 dent (fig. 174) que chaque point p déjà trouvé
 peut servir à en déterminer autant d'autres qu'il
 sera nécessaire: enfin cette description des cour-
 bes asymptotes & semblables n'est pas diffé-
 rente de celle des hyperboles entre leurs asymp-
 totes, & elle est fondée sur les mêmes principes.

F I N.

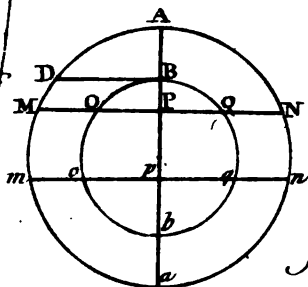


fig. 168

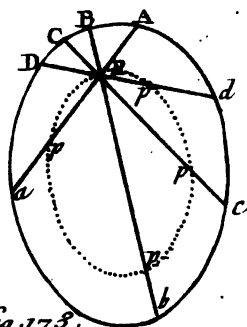


fig. 173.

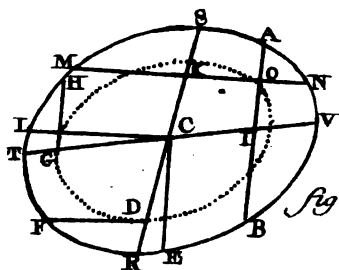


fig. 171.

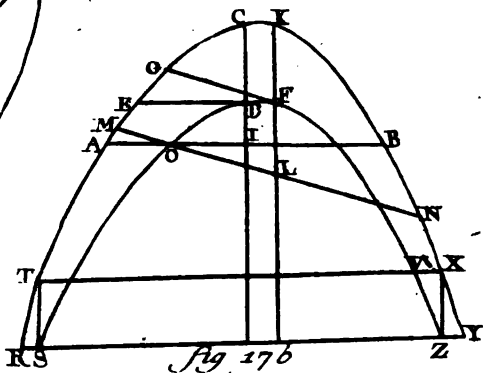
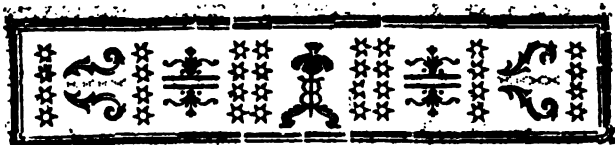


fig. 176





TABLE

DES MATIERES.

AVERTISSEMENT.

Les chiffres marquent seulement les articles & non les pages.

DE LA PARABOLE. LIV. I.

L E M M E fondamental pour l'intelligence de cet ouvrage.

ARR. 1. Définition & génération de la parabole.

art. 2. Cette courbe a deux branches qui s'étendent à l'infini.

3. & 4. Ce que c'est que le Foyer de la parabole.

5. Directrice de la parabole.

6. Ce que c'est que l'axe de la parabole.

7. Sommet de cette courbe. C'est le point le plus proche de la directrice.

8. Définition des Ordonnées ou Appliquées à l'axe.

9. Définition des Abscisses ou Coupées de l'axe

10. Définition du Diamètre d'une parabole.

11. Définition des Tangentes.

art. 12. Définition du Parametre de l'axe. Cette ligne est double de la distance du foyer à la directrice.

13. Propriété de foyer par rapport au parametre de l'axe.

14. Dans la parabole, le quarré d'une ordonnée quelconque est égal au double produit de l'abscisse par une ligne constante, qui est la distance du foyer à la directrice.

15. Autre expression du quarré d'une ordonnée quelconque.

16. Les quarrés des ordonnées de cette courbe sont entr'eux comme de leurs abscisses.

17. Proportion par laquelle on détermine le parametre. Cette ligne est troisième proportionnelle à l'ordonnée & à son abscisse.

18. Une ligne perpendiculaire à l'axe & menée par le sommet de la parabole est tangente en ce point.

19. Un diametre ne rencontre la parabole qu'en un seul point.

20. Une ligne droite qui divise en deux également une autre droite menée d'un point de la directrice au foyer, & qui lui est perpendiculaire, est tangente à la parabole.

21. L'angle fait par la tangente avec l'axe, est égal à l'angle compris entre la directrice, & une ligne menée du foyer au point où cette directrice est rencontrée par une perpendiculaire abaissée du point touchant.

22. Une parabole, son axe, & son foyer étant donnés ; trouver une tangente qui fasse avec l'axe

un angle égal à un angle proposé, pourvu qu'il ne soit pas plus grand qu'un droit.

24. Par un point de la parabole, on ne peut mener qu'une tangente.

25. Toutes les tangentes à la parabole rencontrent l'axe & les diamètres de cette courbe.

26. Trouver une tangente qui fasse avec l'axe un angle moindre que quelqu'angle donné que ce soit.

27. La partie de l'axe comprise entre le sommet de la parabole & la rencontre du même axe par une tangente, est égal à l'abscisse correspondante à cette ordonnée.

28. Si l'on mène par le sommet une tangente à ce point, & une droite quelconque terminée à un diamètre, parallèlement à la tangente menée par l'origine de ce diamètre; les parties de ce diamètre comprises entre son origine & les rencontres de ces droites sont égales.

29. La ligne double de l'abscisse & comprise entre l'ordonnée & la rencontre de l'axe par une tangente est appelée Sou-tangente.

30. Un point étant donné sur la parabole; mener une tangente à ce point.

31. D'un point pris sur le prolongement de l'axe, mener une tangente à la parabole.

32. Une parabole, son axe, son foyer, sa directrice & un point sur le même plan étant donnés; mener une tangente qui passe par ce point.

33. Ce problème a toujours deux solutions tant que le point n'est pas sur la courbe.

34. L'angle compris entre un diamètre & une

tangente est égal à l'angle compris entre la même tangente & une droite menée de l'origine de ce diamètre au foyer,

art. 35, 36, & 37. Application des propriétés de la parabole aux corps à ressort & à la catoptrique.

38. Si par un point touchant, on mène une perpendiculaire à la tangente, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe; la partie de l'axe comprise entre l'ordonnée & cette perpendiculaire, est toujours égale à la moitié du paramètre de l'axe.

39. Autre propriété de cette perpendiculaire.

40. Définition de la Sou-normale ou Sou-perpendiculaire.

41. La sou-perpendiculaire est toujours constante: elle est égale à la moitié du paramètre.

42. Usage de la sou-normale pour la solution de plusieurs problèmes.

43. Application à un exemple.

44, 45, 46, 47, 48, 49, & 50. Propriétés de la parabole nécessaires pour démontrer les propriétés des diamètres.

51. Une droite quelconque parallèle à une tangente & terminée de part & d'autre d'un diamètre à deux points de la courbe, est coupée en deux également par le diamètre qui passe par le point de contact.

52. Toute parallèle à une tangente comprise entre la courbe & le diamètre qui passe par le point touchant, est une Ordonnée à ce diamètre.

53. L'angle de la tangente avec le diamètre détermine l'angle des ordonnées.

54. Les parties d'un diamètre comprises entre son

origine & la rencontre des ordonnées sont appelées Abscisses de ce diametre

55. Les quarrés des ordonnées à un diametre sont entr'eux comme les abscisses correspondantes,

56. Une troisieme proportionnelle à l'abscisse & à une ordonnée correspondante, est appelée parametre de ce diametre.

57, & 58. Les quarrés des ordonnées sont égaux aux produits de leurs abscisses par le parametre. C'est de cette propriété que le parametre a été ainsi nommé.

59. Les propriétés des diametres sont précisément les mêmes que celles de l'axe.

60, 61, & 62. Si l'ordonnée est égale, plus petite ou plus grande que le parametre ; l'abscisse sera aussi égale, plus petite ou plus grande que le même parametre,

63. Si l'on divise en deux également l'angle compris entre la tangente & un diametre ; l'ordonnée à ce diametre menée du point de rencontre de la courbe par cette ligne, qui divise l'angle proposé en deux parties égales, est égale au parametre de ce diametre.

64. Usage de cette proposition pour trouver le parametre d'un diametre.

65. Maniere de déterminer l'angle d'un diametre avec sa tangente, lorsqu'on n'a que la parabole & ce diametre.

66. Le parametre d'un diametre quelconque, est quadruple de la distance de l'origine du même diametre au foyer.

67. Le parametre d'un diametre, surpasse celui de l'axe du quadruple de l'abscisse correspondante à

l'ordonnée à l'axe menée par l'origine de ce diamètre.

68. Le parametre de l'axe est le plus grand de tous les parametres.

69. Si on prend sur l'axe & sur un diamètre des coupées égales ; les ordonnées du diamètre seront plus grandes que celles de l'axe.

70. Les quarrés des ordonnées menées par l'origine de l'axe à un diamètre , & de l'origine d'un diamètre à l'axe , sont entr'eux comme les parametres de l'axe & du diamètre.

71. Le parametre d'un diamètre quelconque est troisieme proportionnelle à l'abscisse correspondante à l'ordonnée menée à l'axe par l'origine du diamètre , & à la tangente menée par le même point.

72. Le parametre d'un diamètre quelconque est égal à la double ordonnée à ce diamètre qui passe par le foyer de la courbe.

73. Cette proposition est vraie pour l'axe comme pour un diamètre.

74 & 75. Remarque sur cette propriété : maniere de déterminer par son moyen le foyer d'une parabole , dont on connoît un diamètre avec son parametre.

76. Tout parametre est quadruple de la distance de l'origine d'un diamètre à la directrice.

77 & 78. Une droite comprise entre l'origine d'un diamètre & la rencontre d'une tangente , est égale à la partie du même diamètre comprise entre son origine & la rencontre de l'ordonnée menée du point de contact à ce diamètre.

79. Définition de la Sou-tangente à un diamètre quelconque.

80. Les sou-tangentes des diamètres ont les mêmes propriétés que celles de l'axe.

81. Demonstration générale de la propriété expliquée à l'article 71.

82. Si deux lignes droites se coupent dans un point au-de-dans ou au-de-hors de la parabole, les rectangles des parties de ces lignes sont entr'eux comme les paramètres des diamètres qui divisent en deux également les parties intérieures des mêmes sécantes.

83. Ces mêmes rectangles sont entr'eux comme les quarrés des tangentes qui leurs sont parallèles, prises depuis leur point de rencontre jusqu'à l'origine des diamètres qui les divisent en deux également.

84. Ces mêmes rectangles sont entr'eux comme les quarrés des ordonnées aux diamètres qui les divisent en deux également, & menées par l'origine des mêmes diamètres.

85. Cas où les tangentes intérieures se coupent en parties réciproques.

86. Cas où la tangente devient moyenne géométrique entre la sécante entière & sa partie extérieure.

87. Autres propriétés des mêmes sécantes.

88. On peut faire usage de cette proposition pour décrire une parabole qui passe par trois points donnés.

89 & 90. Ce problème à une infinité de solutions. Manière de le déterminer.

91. Propriétés des sécantes extérieures par rapport aux diamètres.

92. On déduit de cette proposition les propriétés des sou-tangentes à un diamètre quelconque.

93. Propriétés des sécantes intérieures par rapport à un diamètre. On en déduit une méthode très-simple

de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données par le moyen d'une parabole.

94. Propriétés des sous-tendentes dans la parabole.

95. Manière de trouver plusieurs points de cette courbe.

96 & 97. Remarques sur cette description.

98. Trouver la surface d'une portion de parabole terminée par une double ordonnée à l'axe & par cette courbe. Une telle portion est toujours les deux tiers du rectangle de l'ordonnée par l'abscisse.

99. Le même problème résolu dans le cas d'un diamètre quelconque.

100. Le complément parabolique est toujours le tiers du parallélogramme fait sur l'ordonnée & son abscisse.

101. Le triangle inscrit au segment parabolique est à ce segment comme 3 à 4.

102. Les segments différents d'une même parabole sont entr'eux comme les triangles qui leurs sont inscrits.

103. Une parabole & une droite quelconque égale à la base de cette parabole, étant donnée; décrire sur cette ligne une parabole qui ait avec la première une raison donnée.

104. Propriétés des segments paraboliques comparés entr'eux.

105. Une parabole étant donnée; construire sur une ligne donnée, une autre parabole qui ait avec la première une raison donnée d'une ligne à une autre.

106. Définition des segments paraboliques semblables.

107 & 108. Si les bases & les hauteurs de deux segments

segments paraboliques sont proportionnelles, en supposant de plus que les diametres font des angles égaux avec leurs ordonnées, ces segments seront semblables.

109. *L'inverse de la proposition précédente est vraie.*

110. *Toutes les paraboles sont des figures semblables.*

111. *Elles sont entr'elles comme les quarrés des lignes homologues.*

112 & 113. *Propriété des paraboles de laquelle on déduit une description très-simple de cette courbe,*

Fin de la Parabole.

DE L'ELLIPSE LIV. II.

114. *Génération & description de l'ellipse sur un plan.*

115. *On peut trouver quatre points de l'ellipse par une seule opération.*

116 & 117. *L'ellipse est une courbe fermée & terminée de toutes parts.*

118. *Une ligne menée d'un point de la courbe perpendiculairement à la ligne dont on s'est servi dans les articles précédents pour la décrire, & terminée de part & d'autre à la courbe, est coupée en deux parties égales par cette même ligne.*

119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126 & 127. *Définitions de l'ellipse, de son centre, de son grand axe & de son petit axe; de ses foyers, des ordonnées ou appliquées à l'axe, des abscisses*

ou coupées du même axe. Définition des diamètres & des tangentes de cette courbe.

128. Lemme nécessaire pour l'intelligence de la proposition suivante.

129. Le carré d'une ordonnée à l'axe est au rectangle de ses abscisses, comme le rectangle des distances d'un foyer aux extrémités du grand axe est au carré du même demi-grand-axe.

130. Le rectangle des distances d'un foyer aux extrémités du grand axe est égal au carré du demi-petit-axe.

131. Le demi-petit-axe est moyen géométrique entre les mêmes distances.

132. Le carré d'une ordonnée est au rectangle de ses abscisses comme le carré du grand axe au carré du petit.

133. Les carrés des ordonnées sont comme les rectangles des abscisses correspondantes.

134. Le carré d'une ordonnée au petit axe au produit de ses abscisses, est comme le carré du grand axe au carré du petit.

135. Les carrés des ordonnées au petit axe, sont proportionnels aux rectangles de leurs abscisses.

136 Une ligne troisième proportionnelle aux deux axes est appelée paramètre de celui qui occupe le premier terme de la proportion.

137. Le rectangle d'un axe par son paramètre, est égal au carré de l'autre axe.

138. Le carré d'une ordonnée au grand axe, est égale au produit de son abscisse par le paramètre diminué d'une certaine ligne, qui est quatrième proportionnelle à l'axe au paramètre & à l'autre abscisse.

139. Cette propriété est commune aux deux abscisses d'une ordonnée.

140. C'est de cette propriété que l'abscisse prend son nom.

141. Une double ordonnée à l'axe qui passe par le foyer est égale au paramètre de l'axe.

142. Cette proposition n'est vraie que par rapport à l'axe.

143. Tout diamètre de l'ellipse est coupé en deux parties égales au centre.

144. Le grand axe est le plus grand diamètre possible.

145. Le petit axe est le plus petit diamètre possible.

146. Les deux axes sont les limites de l'augmentation & de la diminution des diamètres.

147. Le cercle décrit du centre de l'ellipse & dont le rayon est égal au demi petit axe & inscrit dans l'ellipse.

148. Une perpendiculaire à l'axe menée par l'extrémité du même axe, touche l'ellipse en ce point.

149. Si par un point de l'ellipse on mène à l'un des foyers une droite égale au grand axe, & que de son extrémité qui est hors de cette courbe, on mène à l'autre foyer une droite déterminée; une ligne qui sera perpendiculaire au milieu de cette droite touchera l'ellipse au point où la première ligne coupe cette courbe.

150. Par un point de l'ellipse on ne peut mener qu'une tangente.

151. Une ellipse, son axe & ses foyers étant donnés, mener une tangente par un point donné.

152. Une ellipse, son axe & ses foyers, étant donnés; mener une tangente qui passe par un point donné sur le même plan.

153. Les angles formés d'un même côté de la tangente par des lignes qui vont du point touchant aux foyers, sont égaux.

154 & 155. Propriétés de l'ellipse dans la catoptrique.

156. Si l'on divise en deux également l'angle formé par deux lignes menées d'un point de l'ellipse aux foyers; la ligne de division venant à rencontrer l'axe, coupera la distance des foyers en parties proportionnelles aux distances du point touchant à ces mêmes foyers.

257. On fait usage de cette proposition pour mener d'un point donné sur l'axe une perpendiculaire à la courbe.

158. Toutes ces perpendiculaires sont nécessairement renfermées entre les deux foyers.

159. Propriété remarquable de l'ellipse.

150. Usage & application de cette propriété dans la catoptrique.

191. Si l'on prolonge une tangente jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe, la portion de même axe comprise entre le centre & le point de rencontre est troisième proportionnelle à l'abscisse de l'ordonnée menée par le point touchant & au demi-diamètre.

162. La ligne comprise entre l'origine de l'axe & la rencontre du même axe par la tangente, est coupée en proportion harmonique.

163. On détermine, par le moyen de cette ligne

la ligne comprise entre l'ordonnée & la tangente terminée à l'axe.

164. Définition de la sou-tangente,

165 & 166. Problème où l'on fait voir l'usage de la sou-tangente, pour mener les tangentes.

167. Les tangentes ont les mêmes propriétés par rapport au petit axe.

168. La proportion harmonique a encore lieu sur le petit axe.

169. Définition de la Sou-normale, ou Sou-perpendiculaire.

170. La sou-normale & l'abscisse sont toujours dans un rapport constant.

171. Les sou-perpendiculaires croissent ou diminuent selon que leurs abscisses souffrent les mêmes variations.

172. La plus grande sou-normale possible est égale au demi-paramètre.

173. Détermination particulière du lieu de toutes les sou-normales possibles. Démonstration de cette proposition.

174. Jamais l'extrémité de la sou-normale, ne peut se confondre avec le centre quoiqu'elle s'en approche toujours.

175. Dans le cercle toutes les perpendiculaires aux tangentes doivent passer par le centre.

176. Les sou-perpendiculaires déterminées sur le petit axe ont les mêmes propriétés.

177. On en déduira les mêmes conséquences.

178. Tout ce qui suit depuis l'art. 178, jusqu'à & compris l'art. 184, peut être regardé comme un

un lemme divisé en plusieurs parties, & dont l'intelligence est absolument nécessaire pour passer des propriétés des axes à la démonstration de celles des diamètres.

185. Dans une ellipse toute droite, parallèle à une tangente & terminée de part & d'autre à l'ellipse, est divisée en deux également par le diamètre mené par le point de contingence.

186, 187, 188, 189 & 190. Définitions des ordonnées à un diamètre, de ses abscisses, de son conjugué, & de son paramètre.

191. Le paramètre du grand axe est le plus petit de tous les paramètres, & celui du petit axe est le plus grand de tous.

192 & 193. Le carré d'une ordonnée à un diamètre est au rectangle de ses abscisses, comme le carré du diamètre au quel elle est parallèle, est au carré de son conjugué.

194. Les carrés des ordonnées à un même diamètre sont entr'eux comme les rectangles de leurs abscisses.

195. Si les diamètres conjugués sont égaux les ordonnées sont moyennes proportionnelles entre leurs abscisses.

196, 197, & 198. Les ordonnées à un diamètre conjugué, ont les mêmes propriétés.

199. Les ordonnées à un même diamètre quelconque ont les mêmes propriétés par rapport au paramètre de ce diamètre que les ordonnées à l'axe.

200. On peut prendre une abscisse quelconque & l'on trouve dans chacune la même propriété.

201. Le quarré d'une ordonnée à un diamètre quelconque , est égale au rectangle de l'une de ses abscisses par le parametre moins un rectangle semblable à celui de ce diamètre par son parametre.

202. Lemme pour la proposition suivante.

203. Si deux droites paralleles à deux diametres conjugués se coupent dans un point , au-de-dans ou au-de-hors de l'ellipse, les rectangles de ces lignes seront proportionels aux quarrés des diametres conjugués qui leur sont paralleles.

204, 205, 206. On démontre dans ces articles les propriétés des sécantes intérieures & extérieures de l'ellipse , dans le cas où les diametres paralleles à ces sécantes ne sont point conjugués l'un à l'autre , c'est - à - dire , dans le cas le plus général.

207. Les rectangles de deux sécantes quelconques sont entr'eux comme les quarrés des tangentes qui leur sont paralleles.

208. Dans le cercle toutes sécantes intérieures ou extérieures s'y doivent couper en parties réciproques. Cas où cela peut arriver aussi dans l'ellipse.

209. Propriété des sécantes par rapport aux parametres. On en déduit les propriétés de ces lignes dans la parabole.

210. Le quarré d'une tangente est au rectangle d'une sécante par sa partie extérieure , comme les quarrés du diamètre parallele à cette tangente est au quarré de celui qui est parallele à la sécanté.

211. On déduit de cette proposition générale les propriétés des ordonnées à un diamètre quelconque. Définition générale de l'ellipse déduite de cette propriété,

212. Dans une ellipse quelconque les rectangles de deux lignes parallèles coupées par une troisième, sont entr'eux comme les rectangles des abscisses de cette troisième ligne.

213. Usage de cette proposition pour faire passer une ellipse par plusieurs points donnés. Deux sections coniques, ne peuvent se couper qu'en trois ou quatre points, jamais en cinq.

214 & 215. Si par un point quelconque de l'ellipse on mene une ordonnée à un diamètre quelconque, & une tangente terminée au prolongement du même diamètre; la partie de ce diamètre comprise entre le centre & la tangente est troisième proportionnelle à l'abscisse & au diamètre.

216. Les triangles formés par deux tangentes & terminés aux deux diamètres, à l'extrémité desquels elles sont tangentes, sont égaux entr'eux.

217. Les propriétés des sous-tangentes sur les diamètres sont les mêmes que celles des mêmes lignes sur les axes.

218. Une ellipse, son centre & un point sur le même plan étant donnés, mener de ce point deux tangentes à la courbe, en ne faisant usage que des propriétés des sous-tangentes.

219. Si sur une même ligne, on décrit un cercle & une ellipse, toutes les tangentes homologues à ces deux courbes passeront par les mêmes points du diamètre commun. La même propriété a lieu pour différentes ellipses.

220. Un parallélogramme fait sur deux diamètres conjugués d'une ellipse, est égal à un parallélogramme

fait

sur deux autres diamètres conjugués de la même courbe.

221. Tous les parallélogrammes formés sur deux diamètres conjugués sont égaux entr'eux & au rectangle des deux axes.

222. Le rectangle d'un demi-diamètre par la perpendiculaire abaissée de son conjugué sur lui-même, est égal au rectangle des deux demi-axes.

223. Si des extrémités de deux diamètres conjugués, on abaisse des ordonnées à un même axe; la somme des carrés des abscisses correspondantes à ces ordonnées, est égale au carré du demi-axe, auquel elles ont été menées. Cette proposition est générale & doit s'entendre de tout diamètre de l'ellipse.

224. La somme des carrés de deux diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des axes.

225. Si des extrémités de deux diamètres conjugués, on mène à un diamètre quelconque deux ordonnées, les produits des ordonnées par leurs abscisses seront égaux.

226. Le rectangle des parties d'une tangente terminée à deux diamètres conjugués est égal au carré du demi-diamètre parallèle à cette tangente.

227. Deux lignes étant données de grandeur & de position pour deux diamètres conjugués d'une ellipse trouver les deux axes. On pourroit aussi par le moyen des propriétés démontrées précédemment, trouver deux autres diamètres conjugués qui fissent entr'eux un angle égal à un angle donné.

228. On peut considérer une ellipse comme une courbe formée des ordonnées d'un cercle, allongées ou accourcies proportionnellement.

229. La surface d'une ellipse est à celle d'un cercle décrit sur un de ses diamètres, comme le parallélogramme formé sur ce diamètre & sur son conjugué est au carré du diamètre sur lequel le cercle a été décrit.

230. La surface d'une ellipse est à celle d'un cercle décrit sur un de ses diamètres, comme la perpendiculaire abaissée de l'extrémité du conjugué à celui sur lequel le cercle a été décrit, est au même demi-diamètre.

231. La surface d'une ellipse est égale à celle d'un cercle dont le rayon seroit moyen proportionnel entre les deux lignes dont on vient de parler.

232. La surface de l'ellipse est à celle d'un cercle décrit sur son grand ou sur son petit axe, comme le petit axe est au grand axe, ou comme le grand axe est au petit.

233. Les segments elliptiques sont aux segments circulaires correspondantes dans les mêmes rapports, que nous venons de voir.

234. Il faut aussi entendre la même chose des secteurs elliptiques & circulaires correspondants.

235. Une ellipse oblique est égale à une ellipse droite c'est-à-dire, qu'une ellipse est égale à une autre qui auroit pour axes un des diamètres conjugués de la première, & la perpendiculaire comprise entre les deux tangentes menées par les extrémités du diamètre conjugué au diamètre commun.

236. Trouver la surface d'une ellipse dont on a deux diamètres conjugués déterminés de grandeur & de position.

237. Trouver la surface d'un segment elliptique.

238. Trouver la surface d'un secteur elliptique.

239. Partager une ellipse en un certain nombre de parties égales, par des lignes menées du centre au périmètre de la courbe, en commençant la division par un point déterminé.

240. Définition des ellipses semblables.

241. Si les deux axes d'une ellipse sont proportionels aux deux axes d'une autre ellipse ; ces deux courbes seront semblables.

242. Les ellipses semblables sont entr'elles comme les quarrés des lignes homologues.

Fin de l'ellipse.

DE L'HYPERBOLE, LIV. III.

243. Des propriétés de l'hyperbole considérée sur un plan. Génération & description de cette courbe.

244. Détermination du rayon dont on se sert pour trouver les points de la courbe.

245. La ligne qui joint deux points correspondants de la courbe à droite & à gauche de celle qui sert à les trouver, est perpendiculaire à cette même ligne.

246, 247, 248, 249, 250, 251, 252 & 253. Définitions des hyperboles opposées de leur centre, de leurs foyers, des axes déterminés & indéterminés, des ordonnées ou appliquées aux mêmes axes, des abscisses des diamètres déterminés & indéterminés, des tangentes de ces courbes.

254. Le quarré d'une ordonnée est au rectangle de ses abscisses, comme le rectangle des distances d'un foyer aux extrémités de l'axe, est au quarré de la moitié du même axe.

255. Les quarrés des ordonnées à l'axe, sont entr'eux comme les produits de leurs abscisses.

256 & 257. Le rectangle des distances d'un foyer aux extrémités de l'axe est égal au quarré du second axe. Le quarré d'une ordonnée est au rectangle de ses abscisses, comme le quarré du second axe est à celui du premier.

258. Si par un point quelconque de l'une des hyperboles, on mene une droite parallele au premier axe & terminée à l'hyperbole opposée; elle sera coupée en deux parties égales, par le second axe prolongé, s'il est nécessaire

259. Manière de déterminer les points des hyperboles par le moyen des ordonnées au second axe.

260. Le quarré d'une ordonnée au second axe, est à la somme des quarrés de ses abscisses, comme le quarré du premier axe est au quarré du second.

261. Les quarrés des ordonnées au second axe sont entr'eux comme les sommes des quarrés de leurs abscisses & de ce second demi-axe.

262. Le quarré d'une ordonnée au second axe dans l'hyperbole équilatere, est égal à la somme des quarrés des abscisses, & du demi-axe.

263. Définition du parametre. Cette ligne est troisieme proportionnelle aux deux axes.

264. Le quarré d'une ordonnée au premier axe, est égal au produit de son abscisse par une quatrieme proportionnelle au premier axe, au parametre & à l'abscisse.

265. Ce rectangle surpasse toujours le rectangle de l'abscisse par le parametre d'un rectangle semblable à celui de l'axe par le même parametre. C'est de cette propriété que la courbe a été nommée hyperbole.

266. Dans l'hyperbole équilatère le carré de l'ordonnée à l'axe est égal au rectangle de ses abscisses.

267. Dans toute l'hyperbole la double ordonnée au foyer est égale au paramètre du premier axe.

268. Cette propriété est commune à toutes les sections coniques.

269. Une droite menée par le centre & terminée aux hyperboles opposées est coupée en deux également par le centre.

270. Une perpendiculaire à l'extrémité de l'axe touche la courbe en ce point.

271. Manière de déterminer la tangente à un point quelconque de la courbe.

272. Par un point on ne peut mener qu'une tangente.

273. Si d'un point touchant on mène des lignes droites aux foyers ; elles formeront des angles égaux avec la tangente.

274. Un corps à ressort qui étant parti d'un foyer viendra choquer la courbe dans un point se réfléchit suivant une ligne, dont le prolongement passe par l'autre foyer.

275. Cette propriété est commune à toutes les sections coniques on la retrouve même dans la parabole. Usage de cette propriété dans la catoptrique. On peut donner tel degré de divergence que l'on voudra au rayon parti d'un corps lumineux placé au foyer d'un hyperboloïde.

276. Par un point donné sur le plan des hyperboles mener une tangente & déterminer le point de contact.

277. Ce problème a toujours deux solutions tant

que le point n'est pas sur la courbe. On peut en faire usage dans le cas où le point donné est sur la courbe.

278. Les distances aux foyers du point de rencontre de l'axe par une perpendiculaire élevée à la tangente au point de contact, sont comme les distances du même point de contingence aux foyers.

279. Jamais ce point ne peut tomber entre le sommet d'une hyperbole & le plus proche foyer.

280, 281, 282. Démonstration & usage des propriétés de l'hyperbole dans la dioptrique.

283. On peut faire une infinité d'hyperboloides différents qui puissent réunir en un point déterminé des rayons parallèles.

284. Définition des asymptotes.

285. La connoissance du centre & des foyers suffit pour déterminer les asymptotes.

286. Et réciproquement, si l'on a les asymptotes & un axe donné de grandeur, on aura les foyers.

287. Le second axe est moyen proportionnel entre les distances d'un point de l'hyperbole aux asymptotes prises sur une ordonnée parallèle au premier prolongée autant qu'il est nécessaire.

288. La même propriété a lieu par rapport aux ordonnées du second axe.

289. L'hyperbole s'approche à l'infini de son asymptote, sans pouvoir la toucher. L'asymptote prend son nom de cette propriété.

290. Si par deux points d'une hyperbole ou de deux hyperboles opposées, on mène quatre lignes droites parallèles entr'elles deux à deux; le rectangle des deux premières est égal au rectangle des deux autres.

291 & 292. Cette proposition est encore vraie; si deux lignes paralleles entr'elles se confondent avec les deux autres.

293. Le quarré d'un demi-diametre déterminé est toujours égal au rectangle des distances d'un point de l'hyperbole aux asymptotes, prises sur une parallele à ce diametre.

294. Les parties d'une droite comprise entre les asymptotes & une même hyperbole ou les hyperboles opposées sont égales.

295 & 296. Une ligne terminée aux asymptotes parallele à des sécantes, & qui ne rencontre l'hyperbole qu'en un point est tangente à ce point & divisée en deux également.

297. Réciproquement si une ligne droite touche une hyperbole, elle rencontre les asymptotes & est divisée en deux parties égales au point touchant.

298. Tous les rectangles des parties d'une droite parallele à une tangente terminée aux asymptotes sont égaux au quarré de la tangente.

299. Si par deux points quelconques d'une hyperbole on mene des lignes paralleles aux asymptotes, les parallélogrammes qui en résultent sont égaux entr'eux.

300. Les rectangles des droites paralleles aux asymptotes sont égaux au quarré d'une même ligne.

301, 302 & 303. Définition de la puissance de l'hyperbole; des abscisses & ordonnées de l'hyperbole considérée par rapport aux asymptotes.

304. On peut faire usage de la dernière propriété pour trouver tous les points de l'hyperbole.

305. On détermine par le même moyen deux nou-

nelles hyperboles dans les angles adjacents à ceux des asymptotes dans lesquels sont comprises les premières. Ces courbes ont précisément les mêmes propriétés que les précédentes.

306. On peut décrire deux nouvelles hyperboles dans les angles des asymptotes adjacents à ceux dans lesquels on a décrit les premières. Ces quatre hyperboles sont nommées hyperboles conjuguées.

307. Si deux lignes droites touchent une hyperbole ou deux hyperboles opposées ; elles forment des triangles égaux avec les asymptotes.

308. Si deux tangentes à une même hyperbole ou à deux hyperboles opposées ; se rencontrent dans un point elles se coupent en parties proportionnelles.

309. Si deux tangentes à une ou à deux hyperboles opposées rencontrent chacune les asymptotes en deux points ; les parties de ces asymptotes comprises entre le centre & les points de rencontre seront proportionnelles.

310. Mener une tangente à l'hyperbole en faisant usage des propriétés des asymptotes.

311. Un diamètre mené par le point touchant d'une tangente coupe en deux parties égales toutes les parallèles à cette tangente.

312. Les parallèles à un diamètre sont coupées en deux également par une ligne menée du centre parallèlement à la tangente à l'origine du premier diamètre.

313. Si l'on prend sur cette parallèle des lignes égales aux parties de la tangente prise entre le point de contact & les asymptotes ; ces points seront aux
hyperboles

hyperboles conjuguées aux premières. On peut décrire ces nouvelles hyperboles par le moyen de leurs conjuguées.

314. Définition des diamètres conjugués.

315. Deux diamètres conjugués de deux hyperboles opposées sont aussi diamètres de leurs conjugués.

316. Deux hyperboles opposées passent par les extrémités de tous les seconds diamètres de leurs conjugués.

317. Tous les parallélogrammes formés sur deux diamètres conjugués, sont inscrits aux hyperboles, & égaux entr'eux.

318. Un parallélogramme étant donné, trouver les quatre hyperboles conjuguées auxquelles il peut être inscrit.

319. Il n'y a qu'une espèce d'hyperbole qui puisse être circonscrite à un parallélogramme déterminé.

320. Par quatre points qui forment un parallélogramme, on ne peut faire passer qu'une espèce d'hyperboles.

321 & 322. Définition des ordonnées à un diamètre & de leurs abscisses.

323. Le carré d'une ordonnée à un diamètre déterminé est au rectangle de ses abscisses, comme le carré de la tangente parallèle à ces ordonnées & comprise entre les asymptotes, est au carré du diamètre qui passe par le point de contact.

324. Les carrés des ordonnées à un diamètre sont comme les rectangles de leurs abscisses.

325. Les carrés des ordonnées sont égaux aux produits de leurs abscisses, dans le cas où les diamètres conjugués sont égaux ; ce qui ne peut arriver que dans l'hyperbole équilatère.

326. Le quarré d'une ordonnée à un second diametre, est à la somme des quarrés des abscisses; comme le quarré du diametre auquel cette ordonnée est parallele, est au quarré de son conjugué.

327. On déduit de cette proposition, une description très-simple de l'hyperbole équilatère.

328. Définition du parametre d'un diametre quelconque. Ce parametre est troisieme proportionel à ce diametre & à son conjugué.

329. Autre propriété du parametre déduite de la définition.

330. Le quarré d'une ordonnée à un diametre quelconque, est égal au produit de son abscisse par le parametre, plus un rectangle qui a même base, & qui est semblable à celui du diametre par son parametre

331. C'est de cette propriété commune aux axes & à tous les diametres que l'hyperbole prend son nom.

332. Si un diametre quelconque est égal à son parametre, l'hyperbole est nécessairement équilatère; & réciproquement.

333. Dans une hyperbole qui n'est pas équilatère aucuns diametres conjugues ne peuvent être égaux. Différence remarquable entre le genre hyperbolique & le genre elliptique.

334. Si l'on a une tangente terminée à un diametre; le quarré de cette tangente est au rectangle des parties du diametre, comme le quarré du demi-diametre parallele à cette tangente est au quarré du demi-diametre coupé par la tangente.

335. Le quarré d'une tangente est à la somme des quarrés des parties d'un diametre qu'elle coupe dans

L'angle des hyperboles conjuguées ; comme le quarré du demi-diametre parallele à cette tangente , est à celui du demi - diametre qu'elle rencontre.

336. Ces deux propositions peuvent être regardées comme une seule.

337. La tangente est moyenne proportionnelle, entre les segments du diametre, lorsque ce diametre est égal au diametre parallele à la même tangente.

338. Si deux lignes droites terminées à une ou à deux hyperboles opposées se coupent en quelque point, au-dedans ou au-dehors de ces courbes ; les rectangles des segments de ces lignes seront entr'eux comme les quarrés des diametres qui leur sont paralleles.

339. Observations importantes sur cette proposition.

340. Les rectangles dont on vient de parler sont entr'eux comme les quarrés des tangentes qui leur sont paralleles , prises depuis les points touchants , jusqu'au point où elles se coupent.

341. Si l'une des sécantes devient tangente ; la proposition a encore lieu.

342. On déduit de cette proposition les propriétés des ordonnées à un diametre quelconque.

343. Cette proportion est la plus générale que l'on puisse donner sur l'hyperbole.

344. On en déduit aussi les propriétés des asymptotes. Une asymptote peut être regardée comme deux diametres conjugués qui tombent l'un sur l'autre.

345. Observation sur cette proposition

346. Définition des sécantes asymptotiques. Elles ont les mêmes propriétés que les sécantes hyperboliques.

347. Les produits de deux sécantes hyperboliques quelconques, sont comme les produits des sécantes asymptotiques correspondantes.

348. Les produits de deux sécantes asymptotiques, sont entr'eux comme les quarrés des tangentes qui leur sont paralleles.

349. On déduit encore de la légalité des parallelogrammes inscrits aux hyperboles & formés sur deux diametres conjugués.

350. Remarque sur cette proposition.

351. La partie d'un diametre quelconque comprise entre le centre & la rencontre d'une tangente est troisieme proportionnelle à l'abscisse de l'ordonnée, menée du point touchant sur le diametre & au même diametre,

352 & 353. Toutes les tangentes qu'on peut mener à une hyperbole sont renfermées sur un diametre quelconque, entre le centre & l'origine de ce diametre prise du même côté que les tangentes.

354. Un diametre joint à une abscisse de l'ordonnée menée au point touchant, est coupé en proportion harmonique par la rencontre de la tangente.

355. Les seconds diametres ont les mêmes propriétés.

356. La partie du diametre comprise entre l'ordonnée & la rencontre du même diametre par la tangente est appelée sou-tangente.

357. Les propriétés des seconds diametres par rapport aux tangentes sont précisément les mêmes que celles des premiers.

358. La tangente à l'extrémité d'un diametre,

est parallèle à son conjugué. Cette propriété est déduite de celles de la sou-tangente.

359. Si l'abscisse est infinie, la tangente passe par le centre.

360. On déduit des sou-tangentes de l'hyperbole celles de la parabole.

361. Une hyperbole, son centre, ses asymptotes, & un point sur le même plan étant donnés ; mener une tangente par ce point.

362. Si par l'extrémité d'un diamètre, on mène une tangente parallèle à une ordonnée au même diamètre, laquelle coupe la tangente menée par l'extrémité de la même ordonnée ; les quarrés des parties de cette tangente, comprises entre l'asymptote, & l'autre tangente, sont toujours dans un rapport constant.

363. On détermine les asymptotes par la même proportion.

364. Définition de la sou-perpendiculaire ou sou-normale.

365. L'abscisse & la sou-normale sont toujours dans un rapport constant.

366. Détermination du lieu de toutes les sou-normales.

367. De tous les cercles inscriptibles au sommet de l'hyperbole, le plus grand est celui qui a pour rayon le demi-paramètre du premier axe.

368. Propriété des sou-normales dans l'hyperbole équilatère.

369. Comparaison entre l'hyperbole & l'ellipse.

370. Si des extrémités de deux diamètres conju-

gués on mene deux ordonnées à un diametre quelconque, la différence des abscisses correspondantes est égale au quarré du diametre sur lequel on les a menées.

371. La différence de deux diametres conjugués est toujours constante & égale à la différence des quarrés des axes. On en conclut qu'on ne peut trouver deux diametres conjugués égaux dans une hyperbole qui n'est pas équilatère.

372. Deux diametres conjugués étant donnés de grandeur & de position, trouver deux autres diametres qui fassent entr'eux un angle égal à un angle proposé.

373 & 374. Définition des segments & secteurs hyperboliques.

375 & 376. Deux segments hyperboliques sont égaux lorsqu'ils sont compris entre paralleles; dans une même hyperbole.

377. Deux trapezes hyperboliques sont égaux lorsqu'ils sont compris entre paralleles.

378. Si par les extrémités des arcs de segments égaux & le centre on mene des diametres; les secteurs qui en résulteront seront égaux.

379. Maniere de déterminer par un point, un segment ou un secteur hyperbolique égal à un proposé.

380. Maniere de partager un secteur ou un segment hyperbolique en deux parties égales.

381. Deux segments hyperboliques sont égaux, lorsqu'ils ont même base & qu'ils sont compris entre paralleles, & différemment inclinés; en supposant qu'ils appartiennent à différentes hyperboles.

382. Deux hyperboles qui ont des bases égales, & qui sont comprises entre parallèles, ont un même second diamètre.

383. Quadrature d'une surface courbe terminée entre une ligne droite & deux arcs hyperboliques.

384. Les secteurs correspondants des mêmes hyperboles sont égaux.

385. Si deux hyperboles ont un diamètre commun, les ordonnées au diamètre commun menées par le même point, sont entr'elles comme les diamètres inégaux.

386. Les segments hyperboliques correspondans suivent le même rapport

387. Il en est de même des secteurs.

388. Toute hyperbole peut être regardée comme une hyperbole équilatère, dont on auroit allongé ou accourci les ordonnées proportionnellement.

389. Si l'on prend sur une asymptote deux parties, & sur l'autre deux autres parties proportionnelles aux deux premières ; & qu'ensuite ayant mené par leurs extrémités des parallèles aux mêmes asymptotes, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la même hyperbole, on mène des diamètres ; les secteurs qui en résulteront seront égaux.

390 & 391. Si on prend sur une même asymptote des parties proportionnelles, les secteurs correspondants sont égaux.

392. Propriétés des secteurs hyperboliques dans les logarithmes.

393. On peut calculer les logarithmes par les aires hyperboliques, & réciproquement,

394 395 & 396. Les trapeſes hyperboliques ont les mêmes propriétés.

397, 398, 399, 400, 401, 402 & 403. Autres propriétés des aſymptotes & des lignes qui leur ſont parallèles. Diverſes progrèsſions géométriques qui en réſultent. Triangles propres à calculer les logarithmes.

404. Si l'on a deux hyperboles placées entre les mêmes aſymptotes & que par un point quelconque de l'une des aſymptotes, on mene parallèlement à l'autre une ligne droite terminée aux deux hyperboles; les quarrés de ces ordonnées extérieures ſont entr'eux comme ceux des puiffances.

405. Les trapeſes hyperboliques corrépondants ſuivent le même rapport.

406 & 407. Ces hyperboles ont leurs axes ſur une même ligne droite.

408. Ces hyperboles ſont aſymptotes les unes par rapport aux autres.

409. Les eſpaces indéfinis compris entre chaque hyperbole, & ſes aſymptotes ſuivent le rapport des puiffances de ces courbes.

410. Les ordonnées à des diametres corrépondants ſont proportionnelles à ces diametres.

411, 412, 413, 414 & 415. Nouvelle Démonſtration des propriétés des ſécantes aſymptotiques & hyperboliques.

416. Définition des hyperboles ſemblables.

417. Les hyperboles décrites entre les mêmes aſymptotes ſont toutes ſemblables.

418 & 419. Le réciproque eſt vrai.

420. Ces courbes ſont entr'elles pour les ſegments

ou secteurs correspondants, comme les quarrés des lignes homologues.

421. Cette propriété est commune à toutes les sections coniques. Détermination des lignes qui tiennent lieu d'asymptotes dans l'ellipse.

422 & 423. Décrire une hyperbole qui soit à une autre dans une raison donnée.

Fin de l'Hyperbole.

DE LA DESCRIPTION DES SECTIONS CONIQUES

LIVRE IV.

424. Problème I. L'axe & les foyers d'une section conique étant donnés; décrire chacune de ces courbes pour une méthode uniforme.

425. Solution pour la parabole. Cette solution revient à la description par laquelle on a donné la définition de cette courbe

426. Solution pour l'ellipse. On trouve deux directrices dans cette courbe, par le moyen desquelles on peut la décrire.

427. Démonstration analytique de cette construction nécessaire pour compléter la démonstration synthétique.

429. Les distances de chaque point de l'ellipse à un des foyers & à la directrice correspondante, sont toujours dans un rapport constant. Ce rapport est celui des distances du sommet de la courbe aux directrices & aux foyers.

430. Le cercle est une ellipse dont les directrices sont

à une distance infinie du centre.

431. L'ellipse est une courbe fermée & terminée. Elle ne peut avoir aucun point entre son sommet & la directrice sur le prolongement de l'axe.

432. Solution pour l'hyperbole. Cette courbe a aussi deux directrices.

433. Dans une hyperbole les distances de chaque point de la courbe aux foyers & à la directrice correspondante, sont toujours dans un rapport constant qui est celui des distances du sommet à la même directrice & aux foyers.

434. L'hyperbole a deux branches qui s'étendent à l'infini & s'éloignent continuellement l'une de l'autre.

Propriétés communes à toutes les sections coniques déduites de la construction précédente.

435 & 436. Toute courbe telle que les distances de chacun de ses points à un foyer & à une directrice, sont toujours dans un rapport constant; peut être appelée section conique. Ce rapport est un rapport d'égalité dans la parabole, de plus petite inégalité dans l'ellipse, & de plus grande inégalité dans l'hyperbole.

437. La courbe est une parabole, une ellipse, ou une hyperbole, selon que le sommet est autant, plus, ou moins éloigné de la directrice que du foyer.

438. Dans l'hyperbole, la courbure est en raison inverse de la distance du foyer au sommet & en raison directe de la grandeur de l'axe. La ligne droite est la dernière hyperbole possible.

439. Le cercle & la ligne droite sont les deux extrêmes des sections coniques. Pour quelle raison.

440. La parabole tient le milieu entre le genre elliptique & le genre hyperbolique. Elle peut être considérée comme ellipse ou comme hyperbole, on y retrouve les propriétés de ces courbes par rapport aux foyers.

441. Dans une section conique, la droite qui passe par l'extrémité de l'ordonnée au foyer, & l'origine de la directrice est tangente à la courbe. Cela se trouve même dans le cercle.

442. Toutes les sections coniques décrites dans un même angle, sont des courbes semblables. C'est pour cette raison que tous les cercles & toutes les paraboles sont des figures semblables; parceque deux lignes ne peuvent pas être parallèles de plusieurs manières, & qu'il n'y a pas deux angles de 45 degrés.

443. Proportion par laquelle on détermine les foyers d'une section conique dont on connoit l'axe & la directrice. Cette proportion a lieu dans le cercle & dans la parabole.

Problème II. Deux diamètres conjugués quelconques étant donnés de grandeur & de position; décrire la courbe à laquelle ils appartiennent.

445. Solution pour la parabole. Un diamètre & son paramètre donnés dans cette courbe, reviennent au même que deux diamètres conjugués dans les autres. Cette solution se déduit immédiatement des propriétés de la parabole & de la nature du paramètre. Elle est une des plus simples. On peut s'en servir pour l'axe comme pour les diamètres. Elle n'en devient que plus facile dans ce cas.

447. Si l'on donnoit un point, cela reviendroit au même. Pourquoi cela. Autres descriptions dans ce dernier cas. Premuere solution.

448. On déduit de cette description les propriétés des tangentes à la parabole, celles des sous-tangentes & des sous-tangentes.

449. Seconde solution plus simple que la première.

450. On peut s'en servir dans toutes sortes de cas ; elle est préférable aux descriptions ordinaires, parce qu'elle est plus expéditive. Manière de s'en servir lorsqu'on connoit l'axe ou un diamètre & son paramètre. On peut aussi s'en servir si l'on a le foyer & le sommet d'une parabole.

451. Solution pour l'ellipse, par plusieurs points. Démonstration de cette description.

452. Seconde solution absolument nécessaire pour l'intelligence de ce qui suit. Cette solution est plus simple que la précédente.

453. Limite des arcs de cercle qui servent à décrire l'ellipse.

454. On peut se servir de cette description dans le cas où les diamètres seroient les axes même de l'ellipse.

455. Manière de rappeler cette description à la première, dans le cas où les axes sont donnés.

456. Une ligne quelconque qui se meut dans un angle quelconque, de manière que ses deux extrémités touchent continuellement les côtés de l'angle décrira une ellipse, si l'on met un fil sur cette ligne ou règle. Tous ses points décriront des ellipses dans ce mouvement si l'angle n'est pas droit.

457. Si l'angle dans lequel se meut la règle supposée est droit, tous les points de cette ligne décriront des ellipses, excepté le milieu qui décrira un cercle. Cela est encore vrai pour le prolongement de cette ligne toujours mû de la même manière ; quoique le milieu de

cette regle ne décrive plus un cercle. On détermine les axes dans ce mouvement.

458. On déduit de-là la description d'un compas elliptique universel. Cette machine est la plus simple de toutes celles que l'on peut imaginer pour décrire des ellipses d'un mouvement continu.

459. Compas elliptique à peu près semblable au précédent, mais moins commode & pour quelle raison.

460. Le rayon du cercle qui passe par le centre & les points où la regle touche les côtés de l'angle dans son mouvement, est une ligne constante. Cette remarque est de la dernière importance.

461. On peut supprimer un des côtés de l'angle, celui que l'on voudra & conserver à la regle le même mouvement par le moyen du rayon dont on vient de parler. Comment cela.

462. Différentes observations sur le dernier corollaire. On peut toujours trouver trois triangles différens pour décrire d'un mouvement continu une ellipse dont on a les diamètres conjugués. Comment cela. Détermination fort simple du rayon dont on a parlé ci-dessus.

463. Application des raisonnemens précédents à la pratique, & description de l'ellipse par le moyen d'un triangle.

464. Regle générale pour déterminer encore plus précisément le rayon dont on a parlé ci-dessus.

465. On peut faire usage de cette description dans le cas où l'on auroit les axes de l'ellipse. Alors les triangles deviennent des lignes droites.

466. Description de deux nouveaux compas elliptiques.

467. Remarque sur la différence de ces deux compas : l'un est toujours préférable à l'autre ; pour quelle raison.

468. Descriptions nouvelles & très-simples par des points d'une ellipse dont les axes sont donnés. Cette description se tire des principes précédents. Démonstration directe de cette construction en faveur de ceux qui ne sont pas accoutumés à se représenter toutes sortes de mouvements.

469. Autre description semblable à la précédente , & plus commode dans la pratique , lorsque la différence des axes est très-petite.

470. Description d'une ellipse dont les diamètres conjugués sont donnés ; dans laquelle on fait usage des propriétés du cercle.

471. Cette solution devient encore plus simple si les diamètres conjugués sont égaux.

472. Solution du problème proposé (num. 444) dans le cas où la courbe demandée est une hyperbole. On décrit cette courbe par plusieurs points d'une manière très simple , en se servant des propriétés des asymptotes. Les diamètres déterminent les asymptotes. On peut encore s'en servir dans le cas où l'on auroit seulement les asymptotes & un point de la courbe.

473. Description de l'hyperbole par un mouvement continu. Cette description se démontre tout d'un coup par les propriétés des asymptotes.

474. Observation sur cette description ; on en conclut que l'hyperbole s'approche toujours de son asymptote sans jamais pouvoir la toucher.

475. On peut se servir indifféremment des deux extrémités de l'axe pour décrire l'hyperbole de la même manière.

476. Description de l'hyperbole équilatère par le triangle rectangle.

477. Cette solution s'applique à l'axe de l'hyperbole équilatère & n'en devient que plus simple.

478. Description d'un compas elliptique, déduit des propriétés des foyers.

479. Le même compas appliqué à l'hyperbole & déduit des mêmes principes.

DES SECTIONS CONIQUES

considérées dans le solide, & de la curbature des conoides quelconques.

LIVRE V.

481. Jusqu'à l'article 487. Définition du cône & de ses différentes espèces ; ce que c'est que l'axe du cône. Il ne peut y en avoir que de deux sortes, cône droit & cône oblique. Ce que c'est que la base & le sommet du cône.

488. Raison pour laquelle on se sert du cône oblique préférablement au cône droit.

489. Une ligne droite menée par le sommet du cône, & un point de la surface conique est nécessairement dans cette surface.

490. Une telle ligne rencontre nécessairement la base du cône.

491. Toute ligne qui passe par le sommet & par un point placé au-dedans ou au-dehors du cône, est elle-même au-dedans ou au-dehors du cône.

492. Si on coupe un cône par un plan qui passe par la le sommet du cône la section est un triangle.

493. Donc la section de tout plan qui passe par l'axe est un triangle.

394. Si une ligne passe par deux points de la surface conique différents du sommet, cette ligne est toute entière au-dedans du cône.

495. Toute ligne parallèle à la base du triangle par l'axe est nécessairement coupée en deux parties égales par le même axe.

496. Un cône coupé par un plan parallèle à sa base, présentera toujours un cercle.

497. Lemme pour l'intelligence de la proposition suivante.

498. Définition particulière du triangle par l'axe. Il ne peut y en avoir qu'un seul qui soit perpendiculaire à la base du cône, manière de le déterminer.

499. Si on coupe un cône par un plan perpendiculaire au plan du triangle par l'axe que l'on suppose perpendiculaire à la base, de manière que la ligne de commune section de ces deux plans fasse avec un des côtés du cône un angle égal à l'angle compris entre l'autre côté & le diamètre de la base, la section sera toujours un cercle.

500. La section dont on vient de parler est appelée sou-contraire.

501. Toute ligne parallèle à une ligne perpendiculaire à la base du triangle par l'axe, qui a un point sur la superficie conique, rencontre nécessairement le plan du triangle par l'axe, qui la coupe en deux parties égales, si elle se termine à deux points de la surface conique.

502. Si on coupe un cône quelconque par un plan dont la commune section avec la base du cône, soit perpendiculaire à la base du triangle par l'axe; le même triangle par l'axe coupera en deux parties égales toutes les lignes menées dans ce plan parallèlement à la commune section

section du même plan avec la base & terminées des deux côtés du triangle par l'axe, à la surface conique.

503. Remarque sur cette proposition dans le cas où le triangle par l'axe fait angle droit avec la base du cône.

504. Définition du diamètre d'une section conique quelconque.

505. Si le diamètre d'une section conique est disposé de manière qu'il ne puisse couper l'autre côté du cône entre le sommet & la base du triangle par l'axe, la section peut être prolongée à l'infini.

506. Si la section coupe les deux côtés du cône sans être parallèle à la base ny posée sou-contrairement, elle ne pourra être un cercle.

507. Si le diamètre de la section est parallèle à un côté du triangle par l'axe, la courbe est une parabole.

508. Cette courbe est précisément la même que celle que l'on considère hors du cône.

509. Manière de déterminer le paramètre d'une parabole par le moyen du cône.

510. Dans la parabole, le paramètre est à la partie comprise entre le sommet de la courbe & celui du triangle par l'axe ; comme le quarré de la base de ce même triangle est au rectangle de ses côtés.

511. Manière de déterminer le paramètre du diamètre d'une parabole, lorsque le triangle par l'axe est équilatéral.

512. Les paramètres des diamètres de différentes sections parallèles, sont entr'eux comme les distances du sommet du triangle par l'axe à chacun des sommets des courbes.

§ 13. Si par le sommet du cône & le foyer d'une parabole on fait passer une droite indéfinie, cette droite passera par les foyers de toutes les paraboles parallèles à la première.

§ 14. La même propriété énoncée d'une manière plus générale & applicable aux points semblablement placés dans chacune de ces courbes.

§ 15. On peut faire usage de cette proposition pour couper dans un cône quelconque une parabole dont le paramètre de l'axe soit déterminé.

§ 16. Lorsque le diamètre de la section coupe les deux côtés du triangle par l'axe, la courbe est une ellipse.

§ 17. La courbe est encore une ellipse dans le cas où le diamètre seroit posé sou-contrairement, & où le triangle par l'axe ne seroit pas angles droits avec le plan de la base.

§ 18. Manière de déterminer dans le cône le diamètre conjugué au diamètre principal.

§ 19. L'ellipse qu'on coupe dans le cône est la même que celle que nous avons examiné sur un plan. Elle est également renflée des deux côtés malgré le sentiment de quelques uns.

§ 20. Si par le sommet du cône dans le plan du triangle par l'axe, on mène une ligne parallèle au diamètre de la section, jusqu'à ce qu'elle rencontre la base du triangle par l'axe aussi prolongée, le paramètre sera quadruple proportionel au carré de cette ligne, au rectangle des parties de la base du triangle par l'axe, & au diamètre de la section donnée.

§ 21. On fait usage de cette analogie pour déter-

miner le diamètre conjugué au diamètre principal de la section.

§ 22. Autre propriété déduite des mêmes principes.

§ 23. On déduit de la proposition précédente les propriétés du cercle.

§ 24. Toutes les ellipses que l'on peut couper dans un cône par des plans parallèles entr'eux, sont des figures semblables.

§ 25. Si par le sommet du cône & un point quelconque d'une ellipse donnée, on mene une droite indéfinie; cette ligne passera par tous les points semblablement placés dans les ellipses parallèles à la première.

§ 26. Ayant les deux axes d'une ellipse, ou seulement un axe & un des foyers, ou encore l'axe & son paramètre, on peut couper une ellipse égale à la proposée dans un cône quelconque. Ce problème doit être du second degré.

§ 27. Si l'on coupe un cône de manière que le diamètre de la section coupe le prolongement d'un des côtés du triangle par l'axe au-dehors du cône la section sera une hyperbole.

§ 28. Le prolongement du plan dont il est question dans le théorème précédent, coupera dans un cône opposé au sommet à celui dont il s'agit, une hyperbole opposée à la première.

§ 29. Ayant mené par le sommet du cône, dans le plan du triangle par l'axe, une ligne parallèle au diamètre de la section; le paramètre sera quatrième proportionel au carré de cette ligne; au rectangle des parties de la base du triangle par l'axe, & au diamètre de la section.

530. Toutes les hyperboles paralleles entr'elles & coupées dans un même cône, ou dans des cônes opposés au sommet, sont des hyperboles semblables.

531. Si par le sommet du cône & un point quelconque d'une hyperbole, on fait passer une ligne indéfinie, cette droite passera par tous les points semblablement placés dans les hyperboles paralleles à la premiere. D'où il suit que cette propriété est commune à toutes les sections coniques.

532. Condition nécessaire pour couper une hyperbole équilatère dans un cône. Quels sont ceux où l'on trouve cette propriété.

533. Si l'on regarde l'hyperbole équilatère comme une courbe à laquelle toutes les autres tendent, on pourra couper dans un cône quelconque la plus grande hyperbole possible.

534. La parabole est la plus petite hyperbole possible. Cette propriété est démontrée par les mêmes principes.

535. On peut faire usage de cette proposition pour couper dans un cône quelconque une hyperbole déterminée, au cas que cela se puisse.

536. Observation sur ce qu'on entend par plus grande hyperbole.

537. Ce que c'est que la directrice d'une section conique dans le cône.

538. Maniere de déterminer dans le cône les asymptotes d'une hyperbole.

539. Eclaircissement sur quelque chose qui avoit été supposé dans la démonstration précédente.

540. La ligne dont nous venons de parler, placée

dans le plan du triangle par l'axe passe nécessairement par le sommet du cône ; & son prolongement détermine sur le diamètre, le centre des hyperboles opposées.

§41. Manière de déterminer dans le cône le diamètre conjugué au premier.

§42. Détermination des axes conjugués des hyperboles opposées toujours considérées dans le cône.

§43. Application de la théorie précédente à la parabole.

§44. Conclusion de cette partie. *Avantage qu'il y a de considérer les courbes dont nous avons traité dans le cône. Raison pour laquelle on doit préférer le cône oblique au cône droit ; & un triangle par l'axe, incliné sur le plan de la base à un triangle par l'axe, qui seroit perpendiculaire à la même base.*

§45. Un paraboloides quelconque formé d'éléments qui croissent dans la raison des quarrés des ordonnées à un diamètre, & dont la base est un polygone régulier ou irrégulier, est le moitié du prisme de même base & de même hauteur.

§46. Le fuseau parabolique dont la base est un cercle, est la moitié du cylindre de même base & de même hauteur.

§47. Deux paraboloides qui ont même base & même hauteur, sont toujours égaux quelque soit leur inclinaison.

§48. On déduit de la formation de ce solide, que toutes les courbes qui passent par une des arrêtes du corps & par le diamètre de la parabole génératrice, sont des paraboles. Manière d'en déterminer le paramètre. Toutes ces paraboles dans un fuseau parabo-

lique droit ou oblique, ont le même parametre que la parabole génératrice.

549. Lemme dans lequel on démontre les propriétés de l'ellipse analogues aux propriétés de l'hyperbole entre les asymptotes. Ce lemme est absolument nécessaire pour la démonstration générale & complete de la solidité de l'ellipsoïde.

550. Un ellipsoïde est les deux tiers du cylindre de même base & de même hauteur. On suppose ce corps formé par des éléments qui croissent dans la raison des cercles faits sur les ordonnées à un diamètre quelconque.

551. Les ellipsoïdes qui ont un diamètre commun & d'une même hauteur quoique différemment inclinés, sont égaux.

552. La même propriété a lieu par rapport à d'autres corps ellipsoïdes dont les éléments seroient des polygones quelconques, qui croitroient dans le même rapport.

553. On déduit de ce théorème général, la solidité de la sphère.

554. Cette proposition donne le moyen de cuber sous les segments ou secteurs ellipsoïdes, aussi bien que les zones des mêmes corps.

555. On fait voir la maniere de calculer un segment quelconque de sphéroïde elliptique.

556. Explication de la formule algébrique trouvée dans l'article précédent.

557. Application de la même formule aux segments sphériques.

558. On déduit de la même formule la solidité de l'ellipsoïde.

§ 59. Maniere de cuber un secteur de sphéroïde elliptique, en faisant usage de la formule précédente.

§ 60. Comparaison de l'ellipsoïde à la sphère décrite sur une perpendiculaire abaissée d'un diamètre sur son conjugué. Ces deux solides sont entr'eux comme le quarré du diamètre sur lequel on a baissé la perpendiculaire, & le quarré de cette perpendiculaire.

Le même ellipsoïde est à la sphère décrite sur le diamètre conjugué au diamètre de révolution, comme le diamètre conjugué à la perpendiculaire abaissée de son conjugué sur lui-même.

§ 61. Solidité de l'hyperboloïde. Elle est égale à celle d'un cône tronqué qui a même hauteur que l'hyperbole génératrice dont les bases sont les cercles faits sur le diamètre conjugué au diamètre de révolution, & sur la dernière double ordonnée terminée aux asymptotes, moins un cylindre fait sur le même diamètre & de même hauteur que l'hyperboloïde.

§ 62. Il faut entendre la même chose de tout autre corps hyperbolique.

§ 63. Analogie entre l'hyperboloïde & l'ellipsoïde.

§ 64. Maniere de cuber les zones hyperboliques.

§ 65. On peut déterminer une portion d'hyperboloïde égale à un ellipsoïde proposé & réciproquement.

§ 66. Définition du conoïde & de ses différentes espèces.

§ 67. Définition du diamètre d'un conoïde quelconque.

§ 68. Si l'on coupe un conoïde quelconque, il en résultera toujours une section conique de même espèce celles que nous avons examinées dans les trois premiers livres.

569. Démonstration sur le paraboloïde.

570. Toute parabole qui résulte d'un conoïde parabolique coupé par un plan parallèle au diamètre du conoïde, a même parametre que la parabole génératrice.

571. Toutes ces paraboles sont asymptotes les unes par rapport aux autres, & ont la propriété principale de l'hyperbole entre ses asymptotes.

572. Si l'on coupe un paraboloïde par un plan oblique au diamètre de la courbe génératrice la section est une ellipse.

573 & 574. Toute section d'un ellipsoïde sera toujours une ellipse; ou un cercle, lorsque le plan coupant est parallèle aux éléments circulaires dont on le conçoit composé.

575. Si on coupe un hyperboloïde par un plan parallèle au diamètre de la section, la courbe sera une hyperbole.

576. & 577. Si le plan coupant est oblique au diamètre, la section est une ellipse. Dans le paraboloïde & l'hyperboloïde on peut toujours couper deux sortes de courbes; dans l'ellipsoïde on n'en peut trouver que du genre elliptique.

578. Toute courbe qui résulte d'une section faite parallèlement au diamètre, est semblable à la courbe génératrice.

Supplément aux sections coniques où l'on démontre d'une manière nouvelle, les propriétés des sécantes intérieures & extérieures à chacune de ces courbes.

E R R A T A.

ART. 1. p. 3. lig. 2. supprimés les deux points
 p. 5. *au bas*, ou a, *lisés*, on a. art. 15. p. 6,
 lig. 2. ordonné *lis*. ordonnée. art. 25. p. 13. lig.
 5. ; que, *lis*. pas. art. 38. p. 20, lig. 5. égal,
lis. égale. art. 42. p. 21, lig. 2, pour solution,
lis. pour la solution. p. 27, lig. 2, ou, *lis*. où.
 art. 25, lig. 2, passe, *lis*. passent. art. 77. p. 38.
 lig. 1. porobole, *lis*. parabole. p. 40, lig. 14 ;
 donc $BD^2 \times mg = gf$, *lis*. $BD \times mg = gf^2$. p. 44.
 lig. 1. du diametre, *lis*. des diametres. p. 56. lig. 3.
 égal, *lis*. égale. p. 97, art. 63 — $\frac{CT^2}{CO}$, *lis*. $\frac{CT^2}{CO}$.
 p. 101, lig. 18, $\times - \frac{CT^2}{CM^2}$, *lis*. $\times \frac{CT^2}{CM^2}$. *au bas de la pag.*
 106 mettrés un point après BT, & ôtés celui qui se
 trouve après PH. p. 107. lig. 11, PAH, *lis*. TAH.
 p. 120, lig. 1. CP, *lis*. CP^2 . p. 122. lig. 10,
 CL^2 , *lis*. CL^2 . p. 124, lig. 22, *lis*. :EL \times LD. p. 133.
 1. lig. ou *lis*. où. p. 137. lig. 6. soit *lis*. fut. p. 137.
 art. 215. proposition, *lis*. proportion. art. 225.
 p. 150, lig. 6, a, *lis*. la. p. 153. art. 225. lig. 14.
 PQ, *lis*. QR. p. 160. art 229. lig. 3. ces *lis*. ses.
 art. 231. p. 173. lig. 5, égal, *lis*. égale. p. 168.
 lig. 11, ou, *lis*. pour. p. 171, lig. 16, abaisera,
lis. abaissera. p. 177. art. 245. lig. 7, du cercle
 Fp, *lis*. dont Fp. p. 181. lig. 10, mettrés un point
 après CD. p. 185. lig. 4, cq^2 *lis*. Cq^2 . Ibid. art.
 262, $CM^2 + CQ$, *lis*. $CM^2 + CQ^2$. p. 194. art.
 274. lois, *lis*. loix. p. 196. d'une hyperboloïde,
lis. d'un. p. 197. lig. 2. plusieurs, plusieurs. art.
 282. p. 201. lig. 3. une loix, *lis*. loi. p. 204.